PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 12 — 15. Juni 1931 — Redaktionsschluß für Nr. 14 am 1. Juli 1931. — 32. Jahrgang

INHALT:

Zusammenfassende Berichte:

R. de L. Kronig und S. Frisch, Kernmomente. S. 457.

Originalmitteilungen:

H. Kühlewein, Einige Versuche über die „magnetische Nachwirkung". S. 472.

K. Przibram, Elektrische Figuren auf photographischen Platten in Flüssigkeiten. Mit Tafel V. S. 481.

H. J. de Boer, Zur Theorie des Schroteffektes. S. 482.

A. Esau, Über den Quereffekt der Magnetostriktion. S. 483.

K. K. Mukherjee, Korrespondenz zwischen Wellen- und klassischer Mechanik. S. 485.

Besprechungen:

H. Oberth, Wege zur Raumschiffahrt. S. 487.

Gmelins Handbuch der anorganischen Chemie. Systemnummer 58. S. 488.

A. Wenzl, Das naturwissenschaftliche Weltbild der Gegenwart. S. 488.

Geschichten der Gesellschaft für Lindes Eismaschinen in Wiesbaden. S. 488.

Berichtigung. S. 488.

Tagesereignisse. S. 488.

Personalien. S. 488.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE.

Besorgt von R. Seeliger.

Kernmomente.

Von R. de L. Kronig und S. Frisch.

Einleitung.

Die Bohrsche Atomtheorie in ihrer ursprünglichen Fassung ging bekanntlich auf Grund der Rutherfordschen Streuversuche von der Annahme aus, daß die Atomkerne im allgemeinen als geladene Massenpunkte betrachtet werden dürfen, und daß nur bei den Erscheinungen des radioaktiven Zerfalls ihre innere Struktur eine Rolle spielt. Diese Annahme hat sich in der Entwicklung der Bohrschen Vorstellungen gut bewährt und auch in der Verfeinerung der Theorie zur Wellenmechanik, welche die Möglichkeit zu einer quantitativen Prüfung an Hand des empirischen Materials gab, als in weitem Maße zutreffend erwiesen. Dank der vertieften theoretischen Deutung der atomaren Vorgänge und dem großen Fortschritt der experimentellen Forschungsmittel ist aber doch in letzter Zeit eine Reihe von Erscheinungen nicht radioaktiver Art an den Tag gekommen, in denen sich außer den zwei Konstanten Ladung und Masse noch andere Eigenschaften des Atomkerns geltend machen.

Wie die Astonschen Messungen zeigen, ist nicht nur die Kernladung ein ganzzahliges Vielfaches Z der positiven Elementarladung, sondern auch die Kernmasse angenähert ein ganzzahliges Vielfaches M der Masse des Wasserstoffkerns (Protons). Dies ist begreiflich, wenn man sich den Kern aufgebaut denkt aus M Protonen und $(M-Z)$ Elektronen, wobei die Abweichung von M von der Ganzzahligkeit zugeschrieben werden muß an die Anwesenheit der Elektronen im Kern und die großen, bei der Kernbildung auftretenden Energiemengen, denen nach dem Einsteinschen Satz von der Trägheit der Energie merkbare Masseverluste entsprechen werden. Diese Auffassung vom Kernbau wird ferner gestützt durch das Austreten von Elektronen und Protonen aus dem Kern bei den Prozessen des spontanen radioaktiven Zerfalls und der künstlichen Kernzertrümmerung.

Setzt man nun zunächst die Protonen und Elektronen, aus denen man sich den Kern aufgebaut denkt, als ruhende Punktladungen voraus, so wäre das elektrische Potential klassisch gegeben durch

$$V = \sum \frac{e_i}{r_i},$$

wobei e_i die Ladung der Kernbestandteile und r_i den Abstand des Aufpunkts von ihnen bedeutet. Schreibt man r und s_i für den Abstand des Aufpunkts und der Kernbestandteile von ihrem Massenmittelpunkt, und nimmt man an, daß $r \gg s_i$, so gilt

$$r_i = r - \left(\mathfrak{s}_i, \frac{\mathfrak{r}}{r}\right),$$

und wir erhalten durch Reihenentwicklung

$$V = \frac{1}{r}\sum e_i + \frac{1}{r^2}\sum e_i\left(\bar{s}_i, \frac{\mathfrak{r}}{r}\right) + \frac{1}{r^3}\sum e_i\left(\bar{s}_i, \frac{\mathfrak{r}}{r}\right)^2 + \cdots.$$

Der Kern verhält sich also so, als ob in seinem Massenmittelpunkt nicht nur die Gesamtladung Σe_i, sondern auch noch ein elektrischer Dipol $\Sigma e_i \bar{s}_i$ und höhere elektrische Pole angebracht wären. Nimmt man die Kernbestandteile als sich bewegend an, so kommen zu diesen konstanten Polen noch periodisch schwingende Glieder hinzu. Wegen dieser Bewegung und wegen des als Spin bezeichneten Eigendrehimpulses der Elektronen und Protonen wird man ferner erwarten dürfen, daß im allgemeinen dem Kern ein resultierender Drehimpuls I (in Quanteneinheiten $h/2\pi$ gemessen) zukommt, und in Verband damit werden von ihm auch magnetische Kräfte ausgehen. Diese können, ähnlich wie die elektrischen Kräfte, beschrieben werden, indem man sich im Kern einen zeitlich konstanten magnetischen Dipol parallel der Richtung des Drehimpulses angebracht denkt, worüber eventuell noch ein zeitlich periodischer Dipol sowohl als höhere magnetische Pole zu überlagern sind. Auf die eventuelle Notwendigkeit, das Coulombsche Kernfeld, wie es in der ursprünglichen Bohrschen Theorie eingeführt wurde, durch elektrische und magnetische Kräfte der eben beschriebenen Art ergänzen zu müssen, hat zuerst Pauli (41) im Zusammenhang mit der Hyperfeinstruktur der Atomspektren aufmerksam gemacht. Zur Deutung des heute bekannten experimentellen Materials hat man sich im allgemeinen damit begnügt, von elektrischen Polen und höheren magnetischen Polen abzusehen und den Kern außer durch seine Masse und Ladung noch durch den Wert des Drehimpulses I und des damit parallelen zeitlich konstanten Teils μ des magnetischen Moments zu kennzeichnen. (Positive Werte von μ bedeuten dabei, daß Drehimpuls und magnetisches Moment gleichgerichtet, negative, daß sie entgegengesetzt gerichtet sind.) Im folgenden gehen wir von dieser Vorstellung aus. Auf diejenigen Erscheinungen, deren vollständige Deutung im Rahmen dieser Voraussetzung nicht möglich ist, wird jeweils aufmerksam gemacht werden.

I. Atomspektren.

1. Hyperfeinstruktur in Linienspektren. Die einfachsten Linienspektren sind die der neutralen Alkaliatome. Sie entstehen durch die Quantensprünge des Leuchtelektrons, während die übrigen Elektronen den abgeschlossenen edelgasartigen Atomrest bilden. Das Leuchtelektron trägt einen Spin $S = \frac{1}{2}$, und zur Beschreibung seiner Bewegung werden drei Quantenzahlen benötigt: Die Hauptquantenzahl n, die die Terme innerhalb einer Termserie unterscheidet, die Azimutalquantenzahl L, die den Bahndrehimpuls des Elektrons bedeutet und gleich 0, 1, 2, 3, . . . für die S-, P-, D-, F- . . . Terme ist, und endlich die innere Quantenzahl J, die als Vektorsumme von L und S den Gesamtdrehimpuls des Elektroms darstellt und für S-Terme den Wert $^1/_2$, für die übrigen Terme die zwei Werte $L \pm \frac{1}{2}$ annimmt. Entsprechend diesen zwei Werten von J sind alle Terme außer den S-Termen in zwei Komponenten gespalten, die man als Feinstruktur, im Falle der Alkalien insbesondere als Dublettstruktur bezeichnet.

Die Spektralanalyse zeigt, daß bei mehreren Alkalien die wirkliche Termmannigfaltigkeit größer ist, als dem soeben skizzierten Schema entspricht, daß nämlich eine Hyperfeinstruktur der Terme auftritt. Zur Erklärung dieser Tatsache hat zuerst Pauli (41) die Annahme eines Kernmoments herangezogen. Eine befriedigende quantitiative Behandlung der auftretenden Verhältnisse verdanken wir Fermi (12) (13). Auch Hargreaves (27) (28) (29) hat dies Problem rechnerisch untersucht, doch sind seine Resultate nach den Ergebnissen Fermis aus weiter unten zu erwähnenden Gründen als überholt zu betrachten. Wir geben deshalb hier nur die Fermische Methode kurz wieder.

Nach der oben gemachten Bemerkung spielen die inneren Elektronen der Alkaliatome bei der Emission der Bogenspektren nur eine untergeordnete Rolle, und man darf deshalb in erster Näherung ihre Wechselwirkung mit dem Leuchtelektron ersetzen durch eine zentrale Abschirmung des Coulombschen Kraftfeldes. Das elektrische Potential des resultierenden Feldes nennen wir V. Es kann etwa nach der statistischen Methode von Thomas[1]) und Fermi[2]) oder nach der Methode des „self-consistent field" von Hartree[3]) berechnet werden. Dem elektrischen Feld ist das magnetische Feld,

1) L. H. Thomas, Proc. Cambr. Phil. Soc. **23**, 542, 1927.
2) E. Fermi, Zeitschr. f. Phys. **48**, 43, 1928.
3) D. R. Hartree, Proc. Camb. Phil. Soc. **24**, 89, 111, 426, 1928.

das vom Kernmoment $\mathfrak{M}$ herrührt, überlagert. Es kann nach der klassischen Elektrodynamik aus dem Vektorpotential

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{r^3}[\mathfrak{M}, \mathfrak{r}]$$

abgeleitet werden.

Es wird nun die Bewegung des Leuchtelektrons in dem durch diese Potentiale gekennzeichneten elektromagnetischen Felde untersucht. Nach der Diracschen Theorie des Elektrons[1]) lautet die Wellengleichung des Problems

$$\left\{W + eV + c\,\mathfrak{S}\left(\frac{h}{2\pi i}\operatorname{grad} + \frac{e}{c}\,\mathfrak{A}\right) + (T+1)\,mc^2\right\}\psi = 0.$$

ψ ist dabei die Wellenfunktion, die aus vier Komponenten ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 besteht. Jede derselben hängt dann noch ab von den Ortskoordinaten des Elektrons und von der Koordinate, die zur Beschreibung der räumlichen Orientierung des Kerndrehimpulses dient. Unter Berücksichtigung des quantenmechanischen Satzes, daß die Komponente eines Drehimpulses I in einer vorgegebenen Richtung, etwa der z-Richtung, nur die $(2I+1)$ Werte $-I, -I+1, \ldots I$ annehmen kann, erweist es sich als zweckmäßig, die Orientierung des Kerndrehimpulses eben durch den Wert dieser Komponente festzulegen, die dann als Variable mit einer endlichen Anzahl möglicher Werte fungiert. Diese Betrachtungsweise ist somit analog der von Pauli[2]) zuerst in der Theorie des Elektronenspins eingeführten. Daß man hierbei das Elektron nach Dirac, den Kern nach Pauli behandelt, ist wohl gerechtfertigt, da der Kern ja eine sehr kleine Geschwindigkeit hat. Anstatt die Komponenten der Wellenfunktion ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 als Funktionen der Ortskoordinaten des Elektrons und dieser diskontinuierlichen Veränderlichen aufzufassen, können wir auch sagen, daß jede Komponente sich wieder in $(2I+1)$ Teilkomponenten spaltet, so daß die Gesamtwellenfunktion aus $4\,(2I+1)$ Komponenten besteht, deren jede dann nur noch von den Ortskoordinaten des Elektrons abhängt. In der Wellengleichung ist weiter W der Energiewert, e der Absolutwert der elektrischen Elementarladung, m die Elektronenmasse, c die Lichtgeschwindigkeit und h die Plancksche Konstante. $\mathfrak{S}$ und T sind die vierreihigen Diracschen Matrizen

$$\mathfrak{S}_x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \mathfrak{S}_y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{S}_z = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

die auf die vier Hauptkomponenten $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ der Wellenfunktion wirken. Endlich sind im Vektorpotential $\mathfrak{A}$ für $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ $(2I+1)$ reihige Matrizen einzusetzen, die auf die $2I+1$ Teilkomponenten jeder der Hauptkomponenten wirken, und die der Vertauschungsrelation

$$\mathfrak{M}_y\mathfrak{M}_z - \mathfrak{M}_z\mathfrak{M}_y = i\,\frac{\mu}{I}\,\mathfrak{M}_x$$

und den hieraus sich durch zyklische Permutation ergebenden Gleichungen genügen.

Läßt man in der Wellengleichung das Vektorpotential zunächst fort, so erhält man die Atomterme ohne Hyperfeinstruktur. Man kann dann den Einfluß dieses Potentials nach bekannten Störungsmethoden in Rechnung bringen. Die Fermische Überlegung zeigt, daß die ^2S-Terme der Alkalien sich in zwei Teilniveaus spalten, von denen das eine $2I$fach das andere $2\,(I+1)$fach entartet ist. Die Differenz der Energien dieser Teilniveaus und der Energie des ursprünglichen ungestörten Niveaus sind beziehungsweise

$$\frac{8\pi}{3}\,\mu_0\mu\,\psi^2(0)\left(-\frac{I+1}{I}, 1\right), \tag{1}$$

wobei μ_0 der Absolutwert des Bohrschen Magnetons ist, $\psi(0)$ der Wert, den die normierte Wellenfunktion am Orte des Kerns haben würde, wenn man die Bewegung des Elektrons im Felde V nichtrelativistisch und unter Vernachlässigung des Kernmomentes, also nach der ursprünglichen Schrödingerschen Theorie, behandelte. (Die Ausdrücke (1) sind dabei noch mit einem relativen Fehler behaftet von der Größenordnung des Quadrats der relativistischen Feinstrukturkonstante des be-

1) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **117**, 610; A **118**, 351, 1928.
2) W. Pauli, Zeitschr. f. Phys. **43**, 601, 1927.

treffenden Elements; s. Breit und Doermann (7), S. 1736.) $\psi(0)$ kann nach der Methode von Thomas (l. c.) und Fermi (l. c.) oder nach der von Hartree (l. c.) angenähert erhalten werden. Wie man sieht, liegt das $2I$fach entartete Niveau tiefer oder höher als das $2(I+1)$fach entartete, je nachdem μ positiv oder negativ ist, d. h. nach der Bemerkung in der Einleitung, je nachdem das magnetische Moment des Kerns vornehmlich der Rotation positiver oder negativer Ladungen zuzuschreiben ist. Man spricht dann von normaler oder verkehrter Termordnung der Hyperfeinstruktur.

Für die ^2P-Terme der Alkalien findet Fermi nach der soeben skizzierten Methode, daß $^2P_{1/2}$ sich ebenfalls in ein $2I$fach und ein $2(I+1)$fach entartetes Teilniveau spaltet. Die Differenzen ihrer Energien und der Energie des ungestörten Niveaus sind gegeben durch

$$\frac{8}{3}\mu_0\mu\,\overline{r^{-3}}\left(-\frac{I+1}{1},\,1\right), \tag{2}$$

wobei $\overline{r^{-3}}$ den Mittelwert von r^{-3} bedeutet. Der Term $^2P_{3/2}$ spaltet sich im allgemeinen in vier Teilniveaus, die beziehungsweise $2(I-1)$-, $2I$-, $2(I+1)$- und $2(I+2)$fach entartet sind. Die Differenzen ihrer Energien und der Energie des ungestörten Terms sind gegeben durch

$$\frac{8}{5}\mu_0\mu\,\overline{r^{-3}}\left(-\frac{I+1}{I},\,-\frac{I+4}{3I},\,\frac{I-3}{3I},\,1\right). \tag{3}$$

Für $I=1$ hat man nur drei Teilniveaus, indem das erste fortfällt, für $I=\frac{1}{2}$ nur zwei, indem die ersten beiden fortfallen. Wieder ist die Termordnung normal oder verkehrt, je nachdem μ positiv oder negativ ist. Die Intervalle der vier Komponenten des $^2P_{3/2}$-Terms genügen einer Intervallregel, da ihre Verhältnisse gleich $(2I-1):(2I+1):(2I+3)$ sind. Zur Auswertung der Größe $\overline{r^{-3}}$ bedient man sich nach Fermi am besten der Formel

$$\overline{r^{-3}}=\frac{\delta}{3Z\mu_0^2}, \tag{4}$$

worin δ den Energieunterschied von $^2P_{3/2}$ und $^2P_{1/2}$ und Z die Kernladung bedeutet.

Die Rechnungen von Hargreaves stehen denen von Fermi dadurch nach, daß er die Bewegung des Elektrons nicht in einem allgemeinen zentralen elektrischen Kraftfeld sondern nur im Coulombschen Felde untersucht, und daß weiterhin dabei nicht die Methode von Dirac sondern die von Pauli zugrunde gelegt wird, was eine strenge Behandlung der S-Terme wegen der auftretenden Konvergenzschwierigkeiten unmöglich macht. Auch ist in den ersten beiden Arbeiten von Hargreaves die Wechselwirkung zwischen Kernmoment und Elektronenspin nicht mit berücksichtigt. Die Fermischen Rechnungen sind nicht nur auf die Spektren der Alkaliatome anwendbar, sondern überhaupt auf alle Spektren, bei deren Aussendung nur ein Elektron beteiligt ist, während sich die übrigen Elektronen in abgeschlossenen Schalen befinden. Hierher gehören namentlich auch die gewöhnlichen Bogenspektren der Elemente *Cu*, *Ag*, *Au*, die ersten Funkenspektren der Erdalkalien und der Elemente *Zn*, *Cd*, *Hg*, sowie die gewöhnlichen Bogenspektren der Elemente in der dritten Kolonne des periodischen Systems.

Was die Zahl und den Entartungsgrad der Hyperfeinstrukturniveaus betrifft, kann man die diesbezüglichen Resultate Fermis auch erhalten, indem man von einem Vektormodell ausgeht. Der Gesamtdrehimpuls J des Atoms ohne Berücksichtigung des Kernmoments setzt sich mit dem Drehimpuls I des Kernes zur Resultierenden F zusammen, wobei

$$F=|J-I|,\,|J-I|+1,\cdots J+I$$

sein kann. Die statistischen Gewichte der Teilniveaus sind dann $2F+1$. Im Modell präzessieren I und J gleichförmig um ihre Resultante mit einer Frequenz, die wegen der geringen Wechselwirkung klein ist gegenüber den übrigen Frequenzen in der Elektronenbewegung. Das Modell ist also ganz von derselben Art wie das Modell, dessen man sich bei der Deutung der gewöhnlichen Multiplettstrukturen bedient. Dort werden L und S zur Resultierenden J zusammengesetzt, hier tritt also J an Stelle von L, I an Stelle von S, F an Stelle von J. Wie vor allem von Hill (30) betont, erwartet man zunächst für F die Auswahlregel $\Delta F=0$ oder ± 1 und ferner für die relativen Intensitäten der diesen Übergängen entsprechenden Hyperfeinstrukturkomponenten Formeln, die man direkt aus den für die Multiplettkomponenten[1]) gültigen erhält, indem man die eben erwähnte Substitution der Quantenzahlen vornimmt. Ihr strenger Beweis verläuft ganz analog dem im Falle der

1) R. de L. Kronig, Zeitschr. f. Phys. **31**, 885, 1925; A. Sommerfeld und H. Hönl, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. 1925, S. 141; H. N. Russell, Nature **115**, 835, 1925.

Multiplettstrukturen gelieferten[1]). Sie seien der Vollständigkeit wegen für die verschiedenen Übergangsmöglichkeiten hier noch einmal zusammengestellt.

$$\left.\begin{aligned} J \longleftrightarrow J-1,\ F \longleftrightarrow F-1&: \quad \frac{P(F)\,P(F-1)}{F},\\ F \longleftrightarrow F&: \quad \frac{(2F+1)\,P(F)\,Q(F)}{F(F+1)},\\ F \longleftrightarrow F+1&: \quad \frac{Q(F+1)\,Q(F)}{F+1}, \end{aligned}\right| \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} J \longleftrightarrow J,\ F \longleftrightarrow F-1&: \quad \frac{P(F)\,Q(F-1)}{F},\\ F \longleftrightarrow F&: \quad \frac{(2F+1)\,R^2(F)}{F(F+1)},\\ F \longleftrightarrow F+1&: \quad \frac{P(F+1)\,Q(F)}{F+1}, \end{aligned}\right| \tag{6}$$

wobei wir die Abkürzungen benutzen:

$$\begin{aligned} P(F) &= (F+J)(F+J+1) - I(I+1),\\ Q(F) &= I(I+1) - (F-J)(F-J+1),\\ R(F) &= F(F+1) + J(J+1) - I(I+1). \end{aligned}$$

Es ist hier noch die Bemerkung am Platze, daß bei Elementen mit mehreren Isotopen die Werte von I und μ für diese noch verschieden sein können. Dann besteht zunächst die Möglichkeit, wenigstens bei leichten Elementen, wie von Hughes und Eckart (31) gezeigt, daß solche Isotopen wegen ihrer verschiedenen Kernmasse gegeneinander um kleine Beträge verschobene Linien besitzen. Diese können dann noch auf Grund der oben erwähnten Tatsache verschiedene Hyperfeinstrukturbilder aufweisen.

Wir kommen zur Prüfung der bisher erhaltenen Ergebnisse an Hand des experimentellen Materials. Bis jetzt ist eine Hyperfeinstruktur mit Sicherheit bei den folgenden hier in Frage kommenden Spektren nachgewiesen: *Na I*, *Rb I*, *Cs I*, *In I*, *Tl I*, *Tl III*, die alle von Atomen herrühren, bei denen außer Elektronen in abgeschlossenen Schalen nur ein einzelnes Leuchtelektron anwesend ist. Bei *Na I* finden Schüler (44) und Dobrezov und Terenin (11), daß jede der *D*-Linien aus zwei Komponenten besteht. Nach Schüler ist der Komponentenabstand etwa 0,022 Å., das Intensitätsverhältnis nach den neuesten Messungen (98) zwischen 1,3 und 1,5, wobei die schwächere Komponente nach violett liegt. Bei *K* ist nach einer Bemerkung von Schüler (47) eine eventuelle Aufspaltung sicher kleiner als $^1/_3$ der bei *Na* erhaltenen. Bei *Rb I* finden Filippov und Gross (15) im zweiten Gliede der Hauptserie λ 4201 und λ 4215, daß jede der beiden Komponenten ebenfalls aus zwei Teilkomponenten besteht. Die Wellenlängendifferenz ist bei beiden 0,020 Å. Bei *Cs I* ist von Jackson (32) in den ersten drei Gliedern der Hauptserie, von Filippov und Gross (15) im zweiten Gliede derselben Serie eine Hyperfeinstruktur beobachtet. Wieder handelt es sich um ein Auseinanderfallen von jeder der Dublettkomponenten in zwei Teilkomponenten. Nach Jackson sind die Frequenzabstände dieser Teilkomponenten in cm^{-1} die folgenden:

n	6	7	8
$6\,^2S - n\,^2P_{^1/_2}$	0,294 ± 0,001	0,300 ± 0,003	0,299 ± 0,005
$6\,^2S - n\,^2P_{^3/_2}$	0,315 ± 0,003	0,308 ± 0,003	0,305 ± 0,005

und ihre Intensitäten etwa gleich. Die Resultate von Filippov und Gross sind hiermit in Übereinstimmung.

Alle diese Ergebnisse lassen sich deuten, wenn man annimmt, daß die Hyperfeinstruktur der genannten Linien zuzuschreiben ist an eine Aufspaltung des Grundterms ^2S in zwei Teilniveaus, während die Aufspaltung der beteiligten ^2P-Terme zu klein ist um aufgelöst zu werden. In der Tat kann man sich mit Hilfe der Gl. (1)—(4) überzeugen, daß die theoretisch zu erwartende Aufspaltung der ^2P-Terme viel kleiner als die des Grundterms ^2S sein muß. Die von Jackson bei *Cs* gefundenen Unterschiede in dem Komponentenabstand bei $^2S - {}^2P_{^1/_2}$ und $^2S - {}^2P_{^3/_2}$ rühren wahrscheinlich noch

1) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **111**, 281, 1926; H. A. Kramers, Proc. Amst. Ak. **33**, 953, 1930.

von der unaufgelösten Struktur der ^2P-Terme her. Sie werden auch, wie man erwarten muß, mit zunehmender Hauptquantenzahl n der ^2P-Terme geringer. Da ein ^2S-Term sich stets in zwei Teilniveaus unabhängig vom Werte I spaltet, insofern nur I von Null verschieden ist, erlauben die Messungen der Aufspaltungen nicht, Schlüsse über die Größe von I zu ziehen. Man kann jedoch nach Gl. (1) für alle möglichen Werte von I den Wert von μ berechnen. Fermi (13) hat solche Rechnungen für *Na*, *Rb* und *Cs* auf Grund der oben erwähnten Messungen ausgeführt, wobei er für *Na* und *Cs* den Wert der normierten Eigenfunktion nach der Thomas-Fermischen Methode, für *Rb* den nach der Hartreeschen Methode zugrunde gelegt hat. Wir stellen hier seine Ergebnisse zusammen, indem wir das Verhältnis des Bohrschen Magnetons μ_0 zum Momente μ des Kerns angeben.

I	$1/2$	1	$3/2$	...	∞
μ_0/μ *Na*	890	670	600	...	450
μ_0/μ *Rb*	1700	1300	1100	...	840
μ_0/μ *Cs*	1950	1460	1300	...	980

Diese Verhältnisse sind alle von der Größenordnung 1000:1. Bei *Rb* ist noch zu beachten, daß es aus zwei Isotopen besteht, die etwa im Verhältnis 3:1 vorhanden sind, während wir es bei *Na* und *Cs* mit einfachen Elementen zu tun haben.

Wie wir sahen, ist eine Entscheidung über den Wert von I auf Grund der vorliegenden Aufspaltungsmessungen nicht zu treffen. Eine solche Entscheidung sollte aber wohl möglich sein, wenn genaue Intensitätsmessungen über die beiden Teilkomponenten vorlägen. Nach den Formeln (5) und (6) sollte nämlich ihr Intensitätsverhältnis in unserem Falle $I:(I+1)$ sein, wobei die schwächere Komponente zum $2I$fach, die stärkere zum $2(I+1)$fach entarteten Teilniveau des ^2S-Terms gehört. Aus den Schülerschen Messungen bei *Na* schließt man dann, daß bei diesem Element das $2I$fach entartete Teilniveau des Grundterms tiefer liegt, daß man also mit normaler Termordnung und mit einem positiven Wert von μ zu tun hat, und daß I einen kleinen Wert, etwa $1/2$, 1, oder $3/2$ haben muß. Dagegen wäre bei *Cs* nach der Bemerkung Jacksons über die hier vorliegenden Intensitätsverhältnisse I wesentlich größer.

Nach noch nicht publizierten Untersuchungen von Frisch sind die Resonanzlinien von *Cu I* doppelt, die von *Ag I* und *Au I* einfach. Messungen in den ersten Funkenspektren der Erdalkalien sind von Frisch (17) bei *Ca II* und *Ba II* und kürzlich auch bei *Sr II* (unveröffentlicht) ausgeführt. Die Resonanzlinien in diesen Spektren wurden mit der zur Verfügung stehenden Auflösung als einfach befunden. Wäre I von Null verschieden und μ von derselben Größenordnung wie bei *Na*, *Rb* und *Cs*, so hätte namentlich im Falle des *Ba* eine Hyperfeinstruktur deutlich wahrnehmbar sein müssen. Man ist deshalb geneigt, allen diesen Elementen außer *Cu* den Wert $I=0$ zuzuschreiben.

Bei *In*, einem einfachen Element, hat Jackson (33) im Bogenspektrum für die Linien $5^2P_{1/2}-6^2S$ (λ 4101), $5^2P_{1/2}-6^2S$ (λ 4511) und $5^2P_{1/2}-5^2D_{3/2}$ (λ 3039) eine Hyperfeinstruktur beobachtet. Die Linie $5\,^2P_{1/2}-5\,^2S$ besteht aus 4 Komponenten, die man deuten kann, indem sowohl das Anfangs- als auch das Endniveau als aus je zwei Teilniveaus mit $F=I\pm\frac{1}{2}$ bestehend aufgefaßt wird, so daß es vier Übergangsmöglichkeiten gibt. Wäre nun $I=\frac{1}{2}$, so hätte man darunter einen Übergang $F=0\to F=0$, dessen Intensität nach der Formel (6) verschwinden müßte. Man schließt deshalb auf einen Wert $I>\frac{1}{2}$, und zwar spricht das Aufspaltungsbild von $5\,^2P_{1/2}-6\,^2S$ nach Jackson für $I=1$. Es sind dann die vier Komponenten von $5\,^2P_{1/2}-6\,^2S$ der Fig. 1a) entsprechend zu deuten mit den dort angegebenen Werten der Termaufspaltungen. Die Intensitäten sind hiermit qualitativ in Übereinstimmung, wenn man sowohl für $6\,^2S$ als für $5\,^2P_{1/2}$ normale Termordnung annimmt. Das Aufspaltungsbild der Linie $5\,^2P_{1/2}-6\,^2S$, das aus vier Komponenten besteht, läßt sich dann wie in Fig. 1b deuten. Die fehlende punktierte Komponente sollte auch nach den Intensitätsformeln sehr schwach sein. Die Termordnung von $5\,^2P_{1/2}$ ist ebenfalls normal. Die Intervalle der drei Teilniveaus stehen mit ziemlicher Genauigkeit im Verhältnis 3:5 in Übereinstimmung mit der Intervallregel für $I=1$. Bei der Linie $5\,^2P_{1/2}-5\,^2D_{3/2}$ findet Jackson zwei Komponenten mit der Wellenzahldifferenz des Terms $5\,^2P_{1/2}$. Die Aufspaltung von $5\,^2D_{3/2}$ ist offenbar zu klein um sich geltend zu machen. Nach den Gl. (2) und (3) sollte sich die Aufspaltung des Terms $5\,^2P_{1/2}$ zu dem Abstand der äußersten Komponenten von $5\,^2P_{1/2}$ für $I=1$ verhalten wie $\frac{15}{8}=1{,}88$, während der experimentelle Wert 3.24 beträgt. (Von Jackson wird irrtümlicherweise behauptet, es herrschte gute Übereinstimmung, da er offenbar versehentlich die Fermischen Formeln für den Fall $I=\frac{1}{2}$ benutzt hat.) Diese ernstliche Diskrepanz könnte zunächst daher rühren, daß es bei einem schweren Element wie *In*.

wo die Dublettaufspaltung groß ist, nicht mehr gestattet ist, in den Formeln (2) und (3) den gleichen Wert von $\overline{r^{-3}}$ einzusetzen. Es wäre aber auch möglich, daß die Annahme, das Kernfeld unterscheide sich von einem Coulombschen nur durch die von einem konstanten magnetischen Dipol herrührenden Glieder, zu einfach ist. Ob eine solche Diskrepanz zwischen Theorie und Erfahrung auch für das Verhältnis der Aufspaltungen in den Termen $5\,^2P_{1/2}$ und $6\,^2S$ besteht, haben wir nicht nachgeprüft, da die dazu notwendige Bestimmung der Wellenfunktion des letzteren eine erhebliche Rechenarbeit erfordert. Für μ_0/μ findet man aus $5\,^2P_{1/2}$ und $5\,^2P_{3/2}$ nach den Fermischen Formeln die Werte $\mu_0/\mu = 318$ und $\mu_0/\mu = 549$. Einige Messungen über die Hyperfeinstruktur im Spektrum des *In I* sind auch von Mc Lennan und Allin (39) veröffentlicht, doch wird die von Jackson erzielte Auflösung nicht erreicht.

Wir kommen zum Spektrum des *Tl I*, das von Back (3), Schüler und Brück (45), (47), Back und Wulff (5), und Frisch (17) untersucht worden ist. Aus dem später zu behandelnden Zeemaneffekt konnten Back und Wulff mit großer Sicherheit auf den Wert $I = \frac{1}{2}$ schließen, der

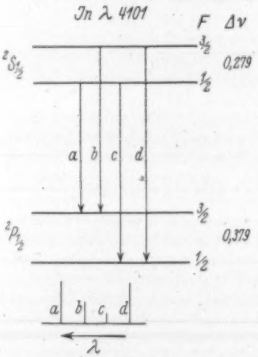

Fig. 1a.

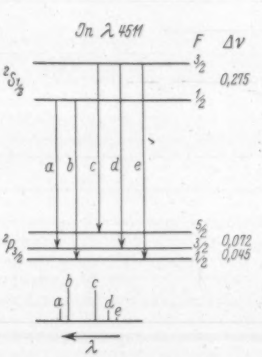

Fig. 1b.

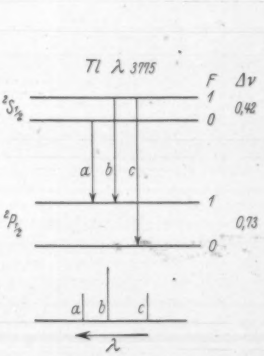

Fig. 2.

auch durch die Messungen in Abwesenheit eines Magnetfeldes bestätigt zu werden scheint. Zunächst besteht die Linie $6\,^2P_{1/2} - 7\,^2S$ (λ 3776) aus drei Komponenten, wie man sie aus dem Schema der Fig. 2 entnimmt. In Übereinstimmung mit den Intensitätsformeln fehlt die Komponente $F = 0 \to F = 0$. Die Aufspaltungen haben nach Back und Wulff die in der Figur angegebenen Werte, die mit den von Frisch erhaltenen zusammenfallen. Die Termordnung ist im Anfangs- wie im Endzustande normal. Die von Schüler und Brück (47) erwähnte schwache vierte Komponente in Aufnahmen von Jackson, die sie einem *Tl*-Isotop zuschreiben, konnte von Back und Wulff und von Frisch nicht beobachtet werden. Die Linie $6\,^2P_{1/2} - 6\,^2D_{1/2}$ (λ 2768) ist nach Frisch doppelt mit einer Aufspaltung, die etwas kleiner ist als die von $6\,^2P_{1/2}$, was man verstehen kann, wenn die Aufspaltung des $6\,^2D_{3/2}$-Terms nicht aufzulösen ist. Bei den Linien $6\,^2P_{3/2} - 6\,^2D_{3/2}$ (λ 3529) und $6\,^2P_{3/2} - 6\,^2D_{5/2}$ (λ 3519) konnte Frisch keine Aufspaltung wahrnehmen, so daß jedenfalls die Aufspaltung von $^2P_{3/2}$ viel kleiner ist als die von $^2P_{1/2}$. Nach der Theorie sollte das Verhältnis 2:5 sein. Sicher ist es wie bei *In* kleiner. Ob das Verhältnis der Aufspaltungen $7\,^2S$ und $6\,^2P_{1/2}$ mit der Fermischen Theorie übereinstimmt, konnte wiederum nicht geprüft werden, da uns die Wellenfunktion im 7^2S-Zustande nicht zur Verfügung stand. Aus der Aufspaltung von $6\,^2P_{1/2}$ errechnet man für μ_0/μ den Wert 469. Es liegen auch Messungen im Spektrum von *Tl III* von Mc Lennan und Allin (37) und von Arvidsson (2) vor, die mit dem Werte $I = \frac{1}{2}$ vereinbar sind.

Außer für die Atome, bei denen sich alle Elektronen mit Ausnahme des Leuchtelektrons in abgeschlossenen Schalen befinden, liegt eine wellenmechanische Behandlung der Hyperfeinstruktur nur für zwei Zustände des einfach ionisierten *Li*-Atoms vor, und zwar für die Zustände $1s2s\,^3S$ und $1s2p\,^3P_{0,1,2}$ des Orthолithiumspektrums. Die Rechnungen sind von Gütinger (25), von Güttinger und Pauli (25a) sowie von Breit und Doermann (6), (7) für den Wert $I = \frac{3}{2}$ ausgeführt worden, während einige modellmäßige Betrachtungen schon früher von Goudsmit und Young (22) veröffentlicht worden sind.

In der Arbeit von Güttinger und Pauli, die eine Verbesserung der Güttingerschen Arbeit ist, wird berücksichtigt, daß die Hyperfeinstruktur des ^3P-Terms vergleichbar ist mit der gewöhnlichen Multiplettaufspaltung dieses Terms, was bei Breit und Doermann nicht in Erwägung gezogen wurde. Die Resultate von Güttinger und Pauli dürften deshalb, was die Aufspaltung des ^3P-Terms betrifft, zuverlässiger sein als die von Breit und Doermann. Dagegen haben die letztgenannten Verfasser bei der Untersuchung des ^3S-Terms genauere Eigenfunktionen zugrunde gelegt (bei Güttinger und Pauli wird das $1s$-Elektron als wasserstoffähnlich behandelt), und da hier ja keine Multiplettstruktur im gewöhnlichen Sinne vorhanden ist, dürfte für diesen Term den Breit-Doermannschen Resultaten der Vorzug zu geben sein.

Wir zeigen zunächst in Fig. 3 das Hyperfeinstrukturschema der beiden betrachteten Niveaus von $Li\,II$ nach Güttinger und Pauli, das sie mit einem bestimmten Wert des magnetischen Moments μ des Kerns erhalten. In Übereinstimmung mit den Regeln der Vektorzusammensetzung entsteht für $I=\frac{3}{2}$ aus dem Niveau $^3S_1$, ein dreifaches Niveau mit $F=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}$. Es gilt die Intervallregel, und zwar sollten nach Breit und Doermann die drei Teilniveaus um die Energieen

$$\frac{8\pi}{3}\mu_0\mu\cdot 1{,}06\,\psi_s^2(0)\left(-\frac{5}{3},-\frac{2}{3},1\right) \qquad (7)$$

gegen die Lage des unaufgespaltenen Niveaus verschoben sein. $\psi_s(0)$ bedeutet dabei den Wert, den die Wellenfunktion eines $1s$-Elektrons am Orte des Li-Kerns nach der nichtrelativistischen Wellenmechanik in Abwesenheit der anderen Elektronen haben würde. Der Term ^3P ist in seiner Multiplettstruktur partiell verkehrt, indem $^3P_1$ am tiefsten liegt. $^3P_0$ spaltet sich, wie man erwarten muß, nicht, aus $^3P_1$ entstehen drei Niveaus mit $F=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}$, aus $^3P_2$ vier Niveaus mit $F=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2}$ in Übereinstimmung mit der Regel der Vektorzusammensetzung. Die Intervallregel gilt für die Aufspaltungsniveaus nur roh, wegen der Vergleichbarkeit von Multiplett- und Hyperfeinstruktur. Schließlich geben Güttinger und Pauli auch Werte für die relativen Intensitäten der verschiedenen nach der Auswahlregel $\Delta F=0$ oder ± 1 möglichen Übergänge an.

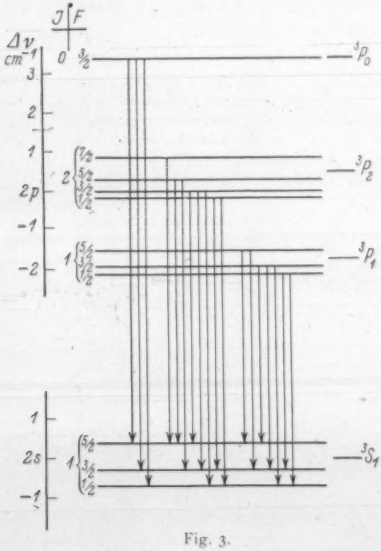

Fig. 3.

Die Hyperfeinstruktur des Übergangs zwischen den betrachteten Niveaus (λ 5485) ist von Schüler (42) (43) (48), Schüler und Brück (47) und Granath (24) untersucht worden. In der Arbeit von Güttinger und Pauli findet sich ein ausführlicher Vergleich ihrer Theorie mit den Schülerschen Messungen, und daraus erhellt, daß die experimentellen Resultate im wesentlichen mit dem Werte $I=\frac{3}{2}$ für das in überwiegender Menge anwesende Isotop Li_7 vereinbar sind. Vor allem besteht die Linie $^3S-{}^3P_0$ aus drei Komponenten entsprechend der Tatsache, daß $^3P_0$ nicht aufgespalten wird, ^3S dagegen in drei Teilniveaus. Auch ist das experimentell gefundene Verhältnis ihrer Intervalle im Einklang mit der Theorie gleich 3:5. Daß für die Intensitäten noch quantitative Abweichungen bestehen, könnte eventuell einem Einfluß der Entladungsbedingungen zuzuschreiben sein, wie er auch bei anderen Hyperfeinstrukturen beobachtet ist. (Siehe z. B. Schüler (49) und Frisch (17).) Die Termordnung ist wieder normal, für μ_0/μ erhält man aus dem Term ^3S nach der Formel (7) den Wert 576. Für den Wert $I=\frac{3}{2}$ des Li_7 spricht auch das Bandenspektrum von Li_2, wie wir später sehen werden. Gewisse Komponenten in seinem Aufspaltungsbilde schreibt Schüler dem Isotop Li_6 zu, für das er das Kernmoment $I=1$ annimmt. Sie stimmen was ihre Intensität gegenüber den Komponenten von Li_7 betrifft etwa überein mit dem, was man nach der relativen Häufigkeit der beiden Isotopen erwarten müßte. Leider gibt es bis jetzt keine Messungen an den Banden von Li_6-Li_6, die es erlauben würden, den Wert $I=1$ unabhängig zu prüfen.

Wir kommen schließlich noch zu denjenigen Elementen, für die wegen der Kompliziertheit der Elektronenbewegung eine theoretische Diskussion nur auf Grund der modell-

mäßigen Vorstellung möglich ist. Wir wollen dabei diese Elemente in der Reihe wachsender Atomnummern besprechen.

Bei *Ne* wurde von Hansen (26) und von Thomas und Evans (50) beobachtet, daß die vier tiefsten Terme $^1P_1$, $^3P_0$, $^3P_1$, $^3P_2$ doppelt sind. Dies wird von den genannten Verfassern der Tatsache zugeschrieben, daß die Linien der beiden Isotopen Ne_{20} und Ne_{22} etwas gegeneinander verschoben sind, denn durch ein Kernmoment könnte ja der Term $^3P_0$ gar nicht aufgespalten werden. Zwar scheint der Massenunterschied der Kerne kaum hinreichend um die gemessene Aufspaltung hervorzurufen, aber vielleicht ist eine Abweichung des elektrischen Feldes der beiden Kerne vom Coulombschen Felde hierfür verantwortlich zu machen.

Im Spektrum des *Na II* liegen Messungen von Frisch und Ferchmin (16) vor, nach denen einige Linien doppelt sind. Es wurde von ihnen erwähnt, daß I wahrscheinlich $^1/_2$ sei, doch erscheint dieser Schluß im Hinblick auf die geringe Aufspaltung ziemlich unsicher und wäre auch schwerlich mit den weiter unten zu erwähnenden Messungen im Bandenspektrum des Na_2 zu vereinbaren.

White und Ritschl (55) haben im Spektrum des *Mn I* eine große Anzahl Linien auf Hyperfeinstruktur untersucht. Sowohl was die Zahl der Komponenten der verschiedenen Terme als auch ihre Intervalle betrifft, sprechen die Messungen mit großer Sicherheit für den Wert $I = \frac{5}{2}$ dieses aus einem einzigen Isotop bestehenden Elementes. Bemerkenswert ist, daß einzelne der Niveaus normale, andere verkehrte Termordnung ihrer Hyperfeinstrukturkomponenten aufweisen.

De Bruin (9) (10) hat eine kurze Mitteilung über die Struktur einiger Linien im Spektrum des *Br I* veröffentlicht. Aus der Zahl der Komponenten und den Intervallen schließt er auf $I = \frac{3}{2}$. Da es jedoch zwei Isotopen dieses Elements gibt, die etwa gleich häufig sind, ist dies Ergebnis wohl mit einigem Vorbehalt anzunehmen.

Für das Spektrum von *Cd I* liegt ein ziemlich umfangreiches Material vor. Vor allem sind die Linien $^3P - {}^3S$ ($\lambda = 4678, 4800, 5086$) von Schüler und Brück (46), Albright (1) und Schüler und Keyston (49) untersucht worden. Schüler und Brück schließen aus ihren Messungen, daß einige der *Cd*-Isotopen den Wert $I = 0$, andere den Wert $I = \frac{1}{2}$ haben, und zwar sprechen sie die Vermutung aus, daß den Isotopen mit geradzahligem Atomgewicht 114, 112, 110, 116 der Wert $I = 0$, den Isotopen mit ungeradzahligem Atomgewicht 113, 111 der Wert $I = \frac{1}{2}$ zukommt. Es muß hervorgehoben werden, daß dies nur eine Vermutung ist. Sind die Isotopen 113, 111 in etwa gleicher Menge anwesend, so wäre es übrigens eigenartig, wenn die Hyperfeinstrukturaufspaltungen derselben genau die gleichen wären. Darum scheint uns bei der Interpretation der Resultate Vorsicht am Platze.

Bei Antimon ist von Löwenthal (35) eine Hyperfeinstruktur beobachtet, doch ist ihre Deutung noch nicht sicher. Dasselbe gilt für das Spektrum von *I II* nach Kerris (34), von *Cs II* nach Filippov und Groß (14) und von *La II* nach White (52). Dagegen konnte White (51) aus der Struktur einer großen Anzahl Linien im Spektrum des *Pr II* einem einfachen Element, mit großer Sicherheit auf den Wert $I = {}^5/_2$ schließen. Wiederum ist wie bei *Mn* ein Teil der Terme normal, ein Teil verkehrt.

Bei *Hg* ist die Deutung der komplizierten Struktur einiger Linien wegen der großen Isotopenzahl sehr schwierig. Interessante neue Resultate hat vor kurzem Tolansky (100) (101) erhalten. Messungen von Mc Lennan, Mc Lay und Crawford (36) im Spektrum von *Tl II* und von Arvidsson (2) im Spektrum von *Tl IV* sind im Einklang mit dem früher erhaltenen Wert $I = \frac{1}{2}$ für dieses Element. [Siehe auch White (53).] Für *Pb* konnte Kopfermann (97) an einigen Linien zeigen, daß sich das Uranblei und das gewöhnliche Blei bezüglich der Hyperfeinstruktur verschieden verhalten.

Sehr ausführlich ist die Hyperfeinstruktur im Spektrum des *Bi* untersucht worden, und zwar für *Bi I* von Back und Goudsmit (4) (19) und von Zeeman, Back und Goudsmit (57), für *Bi II* von Mc Lennan, Mc Lay und Crawford (40) und für *Bi III* von denselben Verfassern und von Arvidsson (2). Nach Back und Goudsmit ist für dieses einfache Element $I = \frac{9}{2}$, was aber erst mit Sicherheit aus den gleich zu besprechenden Untersuchungen am Zeemaneffekt geschlossen werden konnte. Die Intervallregel stimmt gut mit diesem Werte. Die Termordnung ist für manche Terme normal, für andere verkehrt.

2. Zeemaneffekt der Hyperfeinstrukturen. Wie wir gesehen hatten, bietet zur Beschreibung einer Reihe von Erscheinungen in den Hyperfeinstrukturen die modellmäßige Vorstellung die einfachste Handhabe. Das gilt auch für das Verhalten der Hyperfeinstrukturkomponenten im äußeren Magnetfeld H. Alle Resultate, die aus der Theorie des Zeemaneffekts in den gewöhnlichen Multipletts so gut bekannt sind, können fast wörtlich auf den Zemaneffekt der Hyperfeinstrukturen übertragen werden. Dort sind zwei Vektoren L und S, der Bahndrehimpuls der Elektronen und ihr Gesamtspin, durch ihre magnetische Wechselwirkung aneinander gekoppelt und setzen

sich in Abwesenheit eines äußeren Magnetfeldes zur Resultierenden J zusammen. Ein schwaches Magnetfeld bewirkt dann zunächst eine Richtungsquantelung von J, dessen Komponente in der Feldrichtung M_J die Werte von $-J$ bis J annehmen kann, so daß eine Aufspaltung des ursprünglichen Niveaus in $2J+1$ Teilniveaus stattfindet. Dabei ist ein Magnetfeld als schwach zu bezeichnen, wenn seine Wechselwirkung mit den Vektoren L und S klein ist gegenüber der Wechselwirkung zwischen diesen Vektoren. Analog wird sich im Falle der Hyperfeinstruktur zunächst die Resultante F von J und I im Magnetfeld so einstellen, daß ihre Komponente in der Feldrichtung die $2F+1$ Werte $-F$ bis F annimmt, so daß sich das ursprüngliche Niveau in $2F+1$ Teilniveaus spaltet. Nur ist jetzt ein Magnetfeld als schwach zu bezeichnen wenn seine Wechselwirkung mit J und I klein ist gegenüber der zwischen J und I. Genau wie man bei der gewöhnlichen Multiplettstruktur einen Aufspaltungsfaktor $g(J)$ berechnet, erhält man hier einen Aufspaltungsfaktor $g(F)$, der durch die Formel

$$g(F) = g(J)\frac{F(F+1)+J(J+1)-I(I+1)}{2F(F+1)}$$

gegeben ist. Die Verschiebungen der Aufspaltungsniveaus findet man dann aus

$$\Delta W = g(F)\,M_F\mu_0 H, \qquad M_F = -F, \ldots F,$$

wobei μ_0 das Bohrsche Magneton bedeutet. Bei der elementaren Ableitung dieser Formel, wie sie z. B. von Goudsmit und Bacher (23) beschrieben wird, vernachlässigt man das magnetische Moment des Kerns, das mit dem Vektor I verbunden ist, da es nur etwa $^1/_{1000}$ des mit dem Vektor J verknüpften magnetischen Moments beträgt. (Bei den gewöhnlichen Multipletts dagegen ist das magnetische Moment von S von derselben Größenordnung wie das von L.) Dieser Grenzfall dürfte übrigens wegen der Kleinheit der Hyperfeinstruktur experimentell schwer zu realisieren sein.

Wird das Magnetfeld stärker, so tritt ein Paschen-Backeffekt der Hyperfeinstruktur auf, indem die Koppelung zwischen J und I gelöst wird. Für mittlere Felder, bei denen die Wechselwirkung zwischen H und J von derselben Größenordnung ist wie die zwischen I und J, werden die Aufspaltungen und die Intensitäten durch komplizierte Formeln wiedergegeben. Im analogen Fall der Multipletts sind solche Formeln von Heisenberg und Jordan, C. G. Darwin, Mensing und K. Darwin[1]) abgeleitet worden, die man dann auf den Fall der Hyperfeinstruktur übertragen kann.

In sehr starken Feldern stellen sich J und I unabhängig im Magnetfeld ein, so daß ihre Komponenten in der Feldrichtung die Werte $M_J = -J, \ldots J$ bzw. $M_I = -I, \ldots I$ annehmen. Die Verschiebung des Niveaus M_J, M_I ist dabei gegeben durch

$$\Delta W = g(J)\,M_J\mu_0 H + a\,M_I M_J,$$

wenn man wieder den Einfluß des magnetischen Feldes auf das magnetische Moment des Kerns als vernachlässigbar klein betrachtet. Die Konstante a ist der Proportionalitätsfaktor in der Wechselwirkungsenergie zwischen J und I, wenn man für diese ansetzt

$$w = aJI\cos(JI).$$

Bei den Übergängen zwischen den Aufspaltungsniveaus gelten die Auswahlregeln $\Delta M_J = 0$ oder ± 1, $\Delta M_I = 0$, so daß es bei einer bestimmten Wahl von M_J' und M_J'' noch $2I+1$ Übergänge gibt entsprechend den $2I+1$ möglichen Werten von M_I. Im Aufspaltungsbilde begegnen wir also Gruppen von $2I+1$ gleichweit von einander liegenden Komponenten. Die Abstände innerhalb dieser Gruppen von Komponenten sind außerdem unabhängig vom Magnetfeld, solange dies als stark betrachtet werden darf.

Messungen über den Zeemaneffekt von Hyperfeinstrukturen sind bei *Tl* und *Bi* ausgeführt. Bei *Tl* untersuchten Back und Wulff (5) die Linie $6\,^2P_{1/2} - 7\,^2S$ (λ 3775) bei Feldstärken von 17000, 29700 und 43350 Gauß. In den ersten beiden Fällen kann man von einem mittleren Felde sprechen, im letzten Falle nähert man sich der Grenze starker Felder. Die Ergebnisse, die die genannten Verfasser mit der Theorie ausführlich vergleichen, sind in ausgezeichneter Übereinstimmung mit dem Werte $I = \frac{1}{2}$, für den auch die Messungen in Abwesenheit des Feldes sprechen.

Bei *Bi*, einem einfachen Element, sind mehrere Linien von Back und Goudsmit (4), Zeeman, Back und Goudsmit (57) und Goudsmit und Bacher (23) untersucht worden, und zwar teilweise in mittleren, teilweise in starken Feldern. In starken Feldern erweist sich das Aufspaltungsbild als aus Gruppen von zehn Komponenten bestehend, was zu dem Werte $I = \frac{9}{2}$ führt. In den mittleren herrscht gute qualitative Übereinstimmung mit der Theorie, während eine quantitative Prüfung der Einzelheiten hier wegen der großen Komponentenzahl viel schwieriger ist als bei *Tl*.

1) W. Heisenberg und P. Jordan, Zeitschr. f. Phys. **37**, 263, 1926; C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. A **115**, 1, 1927; L. Mensing, ebenda, **39**, 24, 1926; K. Darwin, Proc. Roy. Soc. A **118**, 264, 1928.

II. Molekülspektren.

Intensitätswechsel in den Spektren zweiatomiger Moleküle. Nicht nur in den Linienspektren, sondern auch in den Bandenspektren macht sich der Drehimpuls des Kerns bemerkbar. Bekanntlich kann man die Bewegung eines zweiatomigen Moleküls angenähert wie folgt beschreiben: Auf Grund der Tatsache, daß die Massen der Kerne mehrere tausendmal so groß sind wie die Masse eines Elektrons, während die Kräfte zwischen allen Teilchen dieselbe Größenordnung haben, sind die Frequenzen in der Elektronenbewegung groß verglichen mit den Frequenzen der Kernbewegung. Betrachtet man deshalb zunächst die Kerne als im Raume feste Kraftzentren, so erhält man, den verschiedenen Möglichkeiten der Elektronenbewegung entsprechend, die Elektronenzustände des Moleküls. Erlaubt man nun den Kernen, sich längs ihrer Verbindungslinie zu bewegen, so erhält man für jeden Elektronenzustand eine Reihe von Schwingungsniveaus, vorausgesetzt, daß es überhaupt eine stabile Gleichgewichtslage der Kerne gibt. Wird endlich auch die Richtung der Kernverbindungslinie nicht mehr festgelegt, so tritt die Möglichkeit der Rotation hinzu, und auf jedem Schwingungsniveau baut sich eine Folge von Rotationsniveaus auf. Entsprechend dieser Zerlegung kann bei der wellenmechanischen Behandlung des Problems die Wellenfunktion eines Zustandes als Produkt von drei Bestandteilen geschrieben werden, deren erster die Koordinaten der Elektronen enthält, während der zweite vom Kernabstand und der dritte von den zur Fixierung der Kernverbindungslinie dienenden Winkeln abhängt.

Nimmt man zwei Elektronenzustände und in jedem derselben wiederum ein bestimmtes Schwingungsniveau, so entsteht durch die Übergänge zwischen den zugehörigen Rotationsniveaus eine Bande, vorausgesetzt, daß solche Übergänge nicht durch eine Auswahlregel verboten sind. Die aufeinanderfolgenden Werten der Rotationsquantenzahl J entsprechenden Übergänge bilden die Linien einer Bande, die man zu Zweigen zusammenfaßt, und zwar zu einem P-Zweig wenn J um 1 zunimmt, zu einem Q-Zweig wenn J ungeändert bleibt, und zu einem R-Zweig wenn J um 1 abnimmt. In manchen Banden der zweiatomigen Moleküle mit gleichen Kernen, wie z. B. H_2 und N_2, wird nun beobachtet, daß die aufeinanderfolgenden Linien eines Zweiges abwechselnd stark und schwach sind. Ja, bei einigen Molekülen, wie z. B. He_2 und O_2, tritt an Stelle des Schwächerwerdens ein gänzliches Ausfallen der betreffenden Linien. Eine Erklärung dieser lange bekannten Erscheinung ist erst mit Hilfe der Wellenmechanik und unter Berücksichtigung des Kerndrehimpulses von Heisenberg (67) und Hund (69) geliefert.

Betrachtet man zunächst die Kerne als Massenpunkte, so ist in zweiatomigen Molekülen mit gleichen Kernen die Wellengleichung symmetrisch in den Koordinaten dieser Kerne. Für einen stationären Zustand des Moleküls, der außer der räumlichen Entartung keine weiteren Entartungen besitzt, kann man dann beweisen, daß die Wellenfunktion entweder symmetrisch oder antisymmetrisch in den Koordinaten dieser Kerne ist, d. h. daß sie bei Vertauschung der beiden Kerne ungeändert bleibt oder nur ihr Vorzeichen wechselt. Nach diesem Gesichtspunkt fallen also die Zustände des Moleküls in zwei Gruppen, die man kurz als symmetrisch und antisymmetrisch bezeichnet. Den Symmetriecharakter der Gesamtwellenfunktion kann man dabei bestimmen, wenn man weiß, wie sich ihre einzelnen Bestandteile, die Wellenfunktion der Elektronenbewegung, die der Kernschwingung und die der Kernrotation bei der Vertauschung der Kerne verhalten. Man kann nun die Tatsache des Intensitätswechsels deuten, wenn man annimmt, daß einem Zustand des Moleküls mit Gesamtdrehimpuls J nicht das statistische Gewicht $2J+1$ zukommt, sondern das statistische Gewicht $g_s(2J+1)$ oder $g_a(2J+1)$, je nachdem der betreffende Zustand symmetrisch oder antisymmetrisch in den Punktkoordinaten der Kerne ist.

Eine Erklärung dieses Verhaltens der Gewichte bekommt man wie folgt: Wir wissen aus den Tatsachen der Spektroskopie, daß in einem Atom mit zwei Elektronen (z. B. dem He-Atom) nur diejenigen Zustände in der Natur auftreten, die antisymmetrisch in den Koordinaten (Punkt- sowohl als Spinkoordinaten) der beiden Elektronen sind. Wenn wir auch für zwei gleiche Atomkerne postulieren, daß nur eine Art von Wellenfunktion, entweder die symmetrische oder die antisymmetrische, vorkommen kann, und wenn wir die Kerne als Massenpunkte behandeln, dann müßten entweder die als antisymmetrisch oder die als symmetrisch bezeichneten Zustände wegfallen, so daß dann entweder g_s oder g_a Null sein würde. Bei Molekülen wie He_2 und O_2 ist dies offenbar der Fall.

Haben jedoch die Kerne einen Drehimpuls I, so kann eine Wellenfunktion, die antisymmetrisch in den Punktkoordinaten der Kerne ist, durch Multiplikation mit einer Funktion der Kernspinkoordinaten so ergänzt werden, daß das Produkt symmetrisch wird, wenn alle Koordinaten der beiden Kerne verwechselt werden, und ebenso kann eine in den Punktkoordinaten der Kerne symmetrische Wellenfunktion zu einer in allen Koordinaten antisymmetrischen Wellenfunktion ergänzt werden. Ins-

besondere kann man zeigen, daß bei diesem Prozeß aus einer ursprünglich symmetrischen Wellenfunktion $(I+1)(2I+1)$ symmetrische und $I(2I+1)$ antisymmetrische resultieren, aus einer ursprünglich antisymmetrischen Wellenfunktion dagegen $I(2I+1)$ symmetrische und $(I+1)(2I+1)$ antisymmetrische. Läßt man nur die in allen Koordinaten der Kerne symmetrischen Zustände zu, so werden also die Gewichte der in den Punktkoordinaten der Kerne symmetrischen Zustände mit $(I+1)(2I+1)$ multipliziert, die der antisymmetrischen mit $I(2I+1)$, läßt man dagegen nur die in allen Koordinaten der Kerne antisymmetrischen Zustände zu, so ist es gerade umgekehrt. Im ersten Falle gilt also:

$$\frac{g_s}{g_a} = \frac{I+1}{I},$$

im zweiten Falle:

$$\frac{g_s}{g_a} = \frac{I}{I+1}.$$

Man sagt auch, daß im ersten Falle die Kerne der Statistik von Bose und Einstein[1]), im zweiten Falle der Statistik von Dirac und Fermi[2]) unterworfen sind. Wir sehen also, daß der Wert von I aus dem Verhältnis der schwachen und starken Bandenlinien bestimmt werden kann. Um dagegen feststellen zu können, welche Statistik für die betreffenden Kerne gilt, ist es notwendig zu wissen, ob es die symmetrischen oder die antisymmetrischen Niveaus sind, die das größere Gewicht haben, und dazu ist eine Kenntnis der Wellenfunktionen erforderlich.

Wir kommen nun zur Besprechung der einzelnen Elemente, bei denen Messungen über den Intensitätswechsel vorliegen. Bei H_2 sind wegen dem großen Abstand aufeinanderfolgender Linien und wegen der verhältnismäßig kleinen Linienzahl innerhalb eines Zweiges die Messungen nicht sehr genau. Aus dem Verlauf der spezifischen Wärme von H_2 folgt, wie wir sehen werden, mit großer Sicherheit der Wert $I=\frac{1}{2}$, und wie von Richardson und Das (79) bemerkt wurde, sind die Intensitätsmessungen von Kapuscinski und Eymers (70) mit dem auf Grund hiervon zu erwartenden Verhältnis 1:3 der schwachen und starken Linien vereinbar. Die Messungen von Rasetti (77) über den Ramaneffekt dieses Gases zeigen überdies, daß $g_s < g_a$ ist, was durch das Verhalten der spezifischen Wärme bestätigt wird. Für die Wasserstoffkerne gilt also die Statistik von Dirac und Fermi.

Aus den zahlreichen Arbeiten über das Bandenspektrum des He_2 ergibt sich mit Sicherheit, daß die Hälfte der Linien fehlt, was $I=0$ bedeutet. Wie von Weizel (81) gezeigt wurde, sind in der Natur nur die in den Kernen symmetrischen Zustände vorhanden, so daß also für die Heliumkerne die Statistik von Einstein und Bose gilt.

Bei Li_2 gibt es wegen dem Vorhandensein von zwei Isotopen Li_6 und Li_7 drei Arten Moleküle. Da Li_6 nur in kleiner Menge vorhanden ist, hat man bis jetzt nur die Banden $Li_6 - Li_7$ und $Li_7 - Li_7$ gefunden. In den ersteren fehlt der Intensitätswechsel, da die Kerne nicht gleich sind, in den letzteren ist ein Intensitätswechsel von Wurm (84) und von Harvey und Jenkins (64) (65) festgestellt worden. Da die Angaben dieser Verfasser von einander abweichen, sind neue Messungen von Herrn van Wijk im Utrechter Institut ausgeführt worden, die er uns freundlicherweise vor der Veröffentlichung mitgeteilt hat. Sie ergeben mit Sicherheit den Wert 3:5 für das Intensitätsverhältnis der schwachen und starken Linien, woraus man auf den Wert $I=\frac{3}{2}$ für Li_7 schließt, was in Übereinstimmung ist mit dem aus der Hyperfeinstruktur erhaltenen Wert. Wieder ist $g_s < g_a$, so daß die Li_7-Kerne der Dirac-Fermischen Statistik genügen.

Für C_2 fehlt die Hälfte der Zustände, so daß man $I=0$ hat. Welche Statistik hier herrscht, ist wegen unserer Unkenntnis über den Ursprung der verschiedenen Elektronenzustände vorläufig nicht zu sagen.

Einen höchst interessanten Fall bildet das N_2. Nach den quantitativen Messungen von Ornstein und van Wijk (74) und von van Wijk (82) (83) über den Intensitätswechsel bei diesem Molekül ist das Verhältnis der schwachen zu den starken Linien 2:4, was $I=1$ ergibt. Ferner folgt aus den Messungen von Rasetti (75) 76) (77) (78) über den Ramaneffekt dieses Gases, wie zuerst von Heitler und Herzberg (68) hervorgehoben, daß die N-Kerne der Statistik von Bose und Einstein genügen. Auf die Bedeutung dieser Ergebnisse kommen wir noch zurück.

Bei O_2 fehlt die Hälfte der Linien, so daß $I=0$ ist. Wieder gilt für die Kerne die Statistik von Bose und Einstein.

Im F_2 haben Gale und Monk (63) einen Intensitätswechsel mit merkwürdigen Eigenschaften wahrgenommen. Scheinbar ist nämlich das Verhältnis $g_s : g_a$ innerhalb der untersuchten Bande nicht

1) Bose, Zeitschr. f. Phys. **26**, 178, 1924; A. Einstein, Sitzungsber. d. preuß. Ak. 1924, S. 261.
2) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A. **112**, 661, 1926; E. Fermi, Zeitschr. f. Phys. **36**, 902, 1926.

konstant. Es ist nur sicher, daß die eine Hälfte der Linien sehr viel stärker ist als die andere (im Mittel etwa 3:1), so daß wohl $I = \frac{1}{2}$ sein dürfte. Worin die Ursache des unregelmäßigen Intensitätsverlaufs liegt, ist noch nicht deutlich.

Bei Na_2 ist nach Loomis und Wood (72) mit Sicherheit ein Intensitätswechsel nicht wahrgenommen, was vielleicht auch durch die sehr enge Struktur der betreffenden Banden verhindert wurde. Nach einer Fußnote in einer Arbeit von Ellett (91) ist I wahrscheinlich $^3/_2$ oder größer.

Für S_2 ist nach Naudé und Christey (73) $I = 0$, da die Hälfte der Linien fehlt, und wieder scheint wie bei O_2 die Statistik von Bose und Einstein zu gelten.

Für Cl_2 ist der Intensitätswechsel beim Molekül $Cl_{35} — Cl_{35}$ von Elliott (60) (61) (62) bestimmt worden. Er findet für das Verhältnis der schwachen zu den starken Linien 5:7, was $I = ^5/_2$ ergibt. Die Statistik ist vorläufig noch unbekannt.

Endlich ist das Bandenspektrum von I_2 ausführlich von Loomis (71) analysiert, der jedoch einen Intensitätswechsel nicht beobachtet hat, so daß I wahrscheinlich groß ist.

Auch bei einigen mehratomigen Molekülen ist ein Intensitätswechsel wahrgenommen, und zwar liegen nach Snow (80) Andeutungen hiervon bei N_2O vor, während er mit Sicherheit von Badger (58) bei NH_3 und von Hedfeld und Mecke (66) sowie Childs und Mecke (59) bei C_2H_2 festgestellt worden ist.

III. Andere Erscheinungen.

1. Hyperfeinstruktur in Röntgenspektren. Es tritt naturgemäß die Frage auf, ob sich das magnetische Moment des Kerns auch in den Röntgentermen geltend macht. Denn diese nehmen ja ungefähr wie Z^2 zu, wenn Z die Atomnummer bedeutet, während die Wechselwirkungsenergie mit dem Kernmoment etwa wie r^{-3}, d. h. wie Z^3 zunimmt, so daß die zu erwartende Aufspaltung relativ größer wird. Dagegen ist im Röntgengebiet das zu erreichende Auflösungsvermögen der Spektralapparate geringer als im optischen Gebiet. Theoretisch ist die Frage von Breit (89) untersucht worden, der findet, daß bei den K-Termen der schweren Elemente die Verhältnisse zur Feststellung einer Hyperfeinstruktur noch am günstigsten sind. Selbst dort liegt die zu erwartende Aufspaltung nahe an der Grenze der experimentellen Möglichkeiten und könnte außerdem noch dadurch verwischt werden, daß die äußersten Elektronen in verschiedenen optischen Bahnen gebunden sein können. Allgemein gesprochen dürften also aus den Röntgentermen keine zuverlässigen Aufschlüsse über das Kernmoment zu erwarten sein.

2. Polarisation der Resonanzfluoreszenz. Bekanntlich hängt nach der Theorie dieser Erscheinung der Polarisationsgrad des Fluoreszenzlichtes in Abwesenheit eines magnetischen Feldes ab von der Zahl der Einstellungsmöglichkeiten der Atome im äußeren Felde, d. h. vom Werte ihres Gesamtdrehimpulses im Anfangs- und Endzustande des betreffenden Übergangs. Durch die Anwesenheit des Kerndrehimpulses I hat dieser Gesamtdrehimpuls nicht den Wert J sondern den Wert F, und es sollte also im allgemeinen eine gänzliche Änderung der Polarisationsverhältnisse eintreten, worauf zuerst Ellett (91) hingewiesen hat. Messungen des Polarisationsgrades sind bisher bei Na, Cd und Hg ausgeführt worden. Wegen der großen Anzahl Isotopen der letzten beiden Elemente und unserer Unkenntnis ihrer I-Werte sind die diesbezüglichen Ergebnisse kaum diskutabel. Für Na gibt Ellett den zu erwartenden Polarisationsgrad der D-Linien für $I = 0$, $\frac{1}{2}$, 1 an. Es ist hier jedoch zu bemerken, daß Rechnungen, wie sie von Ellett ausgeführt wurden, ihren Sinn verlieren, wenn die Aufspaltung der Hyperfeinstruktur im Anfangs- oder Endzustande oder in beiden vergleichbar wird mit der durch die Ausstrahlung bedingten natürlichen Breite dieser Zustände.

3. Spezifische Wärme von Wasserstoff. Der Verlauf der spezifischen Wärme von H_2 bei tiefen Temperaturen ist für die Theorie lange Zeit ein Rätsel gewesen. Eine befriedigende Deutung der empirischen Resultate ist endlich Dennison (90) gelungen. Dieser Verfasser legte seinen Rechnungen erstens die Annahme zugrunde, daß den symmetrischen und den antisymmetrischen Zuständen des Moleküles verschiedene Gewichtsfaktoren g_s und g_a zuzuschreiben sind, und zwar so, daß das Verhältnis $g_s : g_a = 1 : 3$ ist. Dies steht in Übereinstimmung mit der in Abschnitt II gemachten Annahme $I = \frac{1}{2}$ für den Kerndrehimpuls und der Gültigkeit der Dirac-Fermischen Statistik für die H-Kerne. Ferner setzte Dennison voraus, daß die Umwandlung der Moleküle in symmetrischen Zuständen in Moleküle in antisymmetrischen Zuständen sehr langsam erfolgt, was durch die Untersuchungen von Bonhoeffer und seinen Mitarbeitern (86) 87) (88) eine direkte Bestätigung gefunden hat. Auch theoretisch ist dies nach einer von Bonhoeffer und Harteck (88) erwähnten Rechnung Wigners zu begreifen, denn die Umwandlungsgeschwindigkeit beruht wesentlich auf der Wechselwirkungsenergie des Kernmoments mit den Elektronen, und diese ist eben sehr klein. Durch alle diese Tatsachen dürfte der Wert $I = \frac{1}{2}$ für den Wasserstoffkern als vollkommen gesichert zu betrachten sein

4. Stoßerscheinungen. Nach den Untersuchungen von Gordon[1]) gilt für die Streuung von Atomkernen einer Art an Atomkernen einer anderen Art die Rutherfordsche Formel, solange das Coulombsche Kraftgesetz für die Wechselwirkung als zutreffend angesehen werden darf. Nach Mott (92) wird die Streuung eine gänzlich andere, wenn die stoßenden und gestoßenen Teilchen beide von derselben Art sind, und zwar hängt das Streugesetz davon ab, durch welche Statistik das Verhalten der Teilchen beschrieben wird. Vor allem gilt die einfache Regel, daß unabhängig von der Geschwindigkeit die Streuung unter einem Winkel von 45^0 halb oder doppelt so groß ist wie die durch die Rutherfordschen Formel gegebene, ja nachdem die Dirac-Fermische oder die Bose-Einsteinsche Statistik anzuwenden ist. Eine Prüfung ist bisher nur für die Streuung von α-Teilchen im Helium möglich gewesen, und nach den Ergebnissen von Blackett und Champion (85) gilt für die *He*-Kerne in der Tat die Bose-Einsteinsche Statistik, wie schon in Abschnitt II erwähnt.

IV. Systematik der Kerneigenschaften.

In nachfolgender Tabelle sind die bis jetzt bekannten Resultate über den Kerndrehimpuls I, das Kernmoment μ und die Kernstatistik zusammengestellt. Außerdem ist bei jedem Element die Atomnummer Z, die Zahl der Protonen M und die Zahl der Elektronen $M-Z$, die sich im Kern befinden, angegeben. Das Erscheinungsgebiet, dem die Resultate entnommen sind, sowie ein Hinweis

Tabelle der Kerneigenschaften.

(Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich auf die einschlägige experimentelle Literatur. Die Buchstaben *H, B, S* in der fünften Kolonne bedeuten Bestimmung von I aus Hyperfeinstruktur, Bandenspektren und spezifischer Wärme. In der letzten Kolonne steht D-F. für Dirac-Fermische Statistik und B-E. für Bose-Einsteinsche Statistik.)

Z	Element	M	$M-Z$	I	μ_0/μ	Statistik
1	*H*	1	0	$^1/_2$ *B* (70) (79); *S* (90)	—	D-F. (77) (90)
2	*He*	4	2	0 *B*	—	B-E. (81) (85)
3	*Li*	6	3	0 *H* (24) (42) (43) (47) (48)	—	—
		7	4	$^3/_2$ *H* (24) (42) (43) (47) (48); *B* (64) (65) (84)	469	D-F. (64) (65) (84)
6	*C*	12	6	0 *B*	—	—
7	*N*	14	7	1 *B* (74) (82) (83)	—	B-E. (68) (75) (78)
8	*O*	16	8	0 *B*	—	B-E.
9	*F*	19	10	$^1/_2$ *B* (63)	—	—
11	*Na*	23	12	$\pm$ 0 *H* (11) (16) (44); *B* (72)	—	—
16	*S*	32	16	0 *B* (73)	—	B-E. (73)
17	*Cl*	35	18	$^5/_2$ B (60) (61) (62)	—	—
19	*K*	39	20	0 ? *H* (47)	—	—
20	*Ca*	40	20	0 *H* (17)	—	—
25	*Mn*	55	30	$^5/_2$ *H* (55)	—	—
29	*Cu*	63	34	$\pm$ 0 *H* (nicht publ.)	—	—
		65	36			
35	*Br*	79	44	$^3/_2$? *H* (9) (10)	—	—
		81	46			
37	*Rb*	85	48	$\pm$ 0 *H* (15)	—	—
		87	50			
38	*Sr*	86	48	0 *H* (nicht publ.)	—	—
		88	50			
47	*Ag*	107	60	0 *H* (nicht publ.)	—	—
		109	62			
48	*Cd*	6 Isotopen		0, $^1/_2$ *H* (1) (46) (49)	—	—
49	*In*	115	66	1 *H* (33) (39)	318,549	—
51	*Sb*	121	70	$\pm$ 0 *H* (35)	—	—
		123	72		—	—
53	*J*	127	74	$\pm$ 0 *H* (34); *B* (71)	—	—
55	*Cs*	133	78	$\pm$ 0 *H* (14) (15) (32)	—	—
56	*Ba*	138	82	0 *H* (17)	—	—
57	*La*	139	82	$\pm$ 0 *H* (52)	—	—
59	*Pr*	141	82	$^5/_2$ *H* (51)	—	—
79	*Au*	—	—	0 *H* (nicht publ.)	—	—
80	*Hg*	Viele Isotopen		$\pm$ 0 *H* (100) (101)	—	—
81	*Tl*	205	124	$^1/_2$ *H* (2) (3) (5) (17) (36) (37) (45) (47)	469	—
82	*Pb*	Viele Isotopen		0, $^1/_2$ *H* (97)	—	—
83	*Bi*	209	126	$^9/_2$ *H* (2) (4) (19) (23) (40) (57)	—	—

1) W. Gordon, Zeitschr. f. Phys. **48**, 180, 1928.

auf die diesbezüglichen experimentellen Arbeiten ist jeweils beigefügt. Fragezeichen bedeuten eine Unsicherheit der Ergebnisse.

Wie man sieht gilt in der großen Mehrzahl der Fälle die Regel, daß I ganzzahlig oder halbzahlig ist, je nachdem die Zahl der Teilchen (Protonen und Elektronen) im Kern geradzahlig oder ungeradzahlig ist. Eine Ausnahme findet sich nur bei Li_6 mit $I = 0$, N_{14} mit $I = 1$, K_{39} mit $I = 0$ und In mit $I = 1$. Für Li_6 und K_{39} sind die Ergebnisse ziemlich unsicher und auch für In könnten noch Zweifel bestehen, bei N dagegen ist der I-Wert ganz zuverlässig und auch die Gültigkeit der Bose-Einsteinschen Statistik festgestellt. Wie von Kronig (94) (95) zuerst hervorgehoben, ist der Wert $I = 1$ darum so merkwürdig, weil nach den Regeln der Zusammenstellung von Drehimpulsen in der Quantenmechanik bei einer ungeraden Zahl von Teilchen, die alle (sowohl Protonen als Elektronen) einen Drehimpuls $^1/_2$ haben, durchaus eine halbzahlige Resultierende I zu erwarten wäre. Auch sollte, wie von Ehrenfest und Oppenheimer (93) ausführlich begründet wurde, bei ungerader Teilchenzahl im Kerne die Dirac-Fermische und bei gerader Teilchenzahl die Bose-Einsteinsche Statistik gelten, indem man sich die Vertauschung zweier Kerne zustande gebracht denken kann durch eine Reihe aufeinanderfolgender Vertauschungen der Kernbestandteile. Eine Aufklärung dieser Widersprüche dürfte erst zu erwarten sein von einer genauen Kenntnis der im Kerne herrschenden Elementargesetze.

Literaturverzeichnis.

I. Atomspektren.

1) Albright, C. L., Phys. Rev. **36**, 847, 1930.
2) Arvidsson, G., Nature **126**, 565, 1930.
3) Back, E., Ann. d. Phys. **70**, 333, 1923.
4) Back, E., und S. Goudsmit, Zeitschr. f. Phys. **47**, 174, 1928.
5) Back, E., und J. Wulff, Zeitschr. f. Phys. **66**, 31, 1930.
6) Breit, G., und F. W. Doermann, Phys. Rev. **36**, 1262, 1930.
7) Breit, G., und F. W. Doermann, Phys. Rev. **36**, 1732, 1930.
8) Breit, G., Phys. Rev. **37**, 51, 1931.
9) Bruin de, T. L., Naturwiss. **18**, 265, 1930.
10) Bruin de, T. L., Nature **125**, 414, 1930.
11) Dobrezov, L., und A. Terenin, Naturwiss. **16**, 656, 1928.
12) Fermi, E., Nature **125**, 16, 1930.
13) Fermi, E., Zeitschr. f. Phys. **60**, 320, 1930.
14) Filippov, A., und E. Groß, Zeitschr. f. Phys. **42**, 77, 1927.
15) Filippov, A., und E. Groß, Naturwiss. **17**, 121, 1929.
16) Frisch, S., und A. Ferchmin, Naturwiss, **18**, 866, 1930.
17) Frisch, S., Zeitschr. f. Phys. **68**, 758, 1931.
18) Gibbs, R. C., H. E. White, und J. E. Ruedy, Proc. Nat. Ac. Sci. **15**, 642, 1929.
19) Goudsmit, S., und E. Back, Zeitschr. f. Phys. **43**, 321, 1927.
20) Goudsmit, S., Naturwiss. **17**, 805, 1929.
21) Goudsmit, S., und R. F. Bacher, Phys. Rev. **34**, 1501, 1929.
22) Goudsmit, S., und L. A. Young, Nature **125**, 461, 1930.
23) Goudsmit, S., und R. F. Bacher, Zeitschr. f. Phys. **66**, 13, 1930.
24) Granath, L. P., Phys. Rev. **36**, 1018, 1930.
25) Güttinger, P., Zeitschr. f. Phys. **64**, 749, 1930.
25a) Güttinger, P., und W. Pauli, Zeitschr. f. Phys. **67**, 743, 1931.
26) Hansen, G., Naturwiss. **15**, 163, 1927.
27) Hargreaves, J., Proc. Roy. Soc. A **124**, 568, 1929.
28) Hargreaves, J., Proc. Roy. Soc. A **127**, 141, 1930.
29) Hargreaves, J., Proc. Roy. Soc. A **127**, 407, 1930.
30) Hill, E. L., Proc. Nat. Ac. Sci. **15**, 779, 1929.
31) Hughes, D. S., und C. Eckart, Phys. Rev. **36**, 694, 1930.
32) Jackson, D. A., Proc. Roy. Soc. A. **121**, 432, 1928.
33) Jackson, D. A., Proc. Roy. Soc. A. **128**, 508, 1930.
34) Kerris, W., Zeitschr. f. Phys. **60**, 20, 1930.
35) Löwenthal, H., Zeitschr. f. Phys. **57**, 822, 1929.
36) Mc. Lennan, J. C., A. B. Mc. Lay, und M. F. Crawford, Proc. Roy. Soc. A. **125**, 570, 1929.
37) Mc. Lennan, J. C., und E. J. Allin, Proc. Roy. Soc. *A*. **129**, 43, 1930.
38) Mc. Lennan, J. C., und A. M. Durnford, Proc. Roy. Soc. A. **129**, 48, 1930.
39) Mc. Lennan, J. C., und E. J. Allin, Proc. Roy. Soc. *A*. **129**, 208, 1930.
40) Mc. Lennan, J. C., A. B. Mc. Lay, and M. F. Crawford, Proc. Roy. Soc. A. **129**, 579, 1930.
41) Pauli, W., Naturwiss. **12**, 741, 1924.
42) Schüler, H., Ann. d. Phys. **76**, 292, 1925.
43) Schüler, H., Zeitschr. f. Phys. **42**, 487, 1927.
44) Schüler, H., Naturwiss. **16**, 512, 1928.
45) Schüler, H., und H. Brück, Zeitschr. f. Phys. **55**, 575, 1929.
46) Schüler, H., und H. Brück, Zeitschr. f. Phys. **56**, 291, 1929.
47) Schüler, H., und H. Brück, Zeitschr. f. Phys. **58**, 735, 1929.
48) Schüler, H., Zeitschr. f. Phys. **66**, 431, 1930.
49) Schüler, H., und J. E. Keyston, Zeitschr. f. Phys. **67**, 433, 1931.
50) Thomas, E., und E. J. Evans, Phil. Mag. **10**, 128, 1930.
51) White, H. E., Phys. Rev. **34**, 1397, 1929.
52) White, H. E., Phys. Rev. **34**, 1405, 1929.
53) White, H. E., Proc. Nat. Ac. Sci. **16**, 68, 1930.
54) White, H. E., Phys. Rev. **35**, 441, 1930.
55) White, H. E., and R. Ritschl, Phys. Rev. **35**, 1146, 1930.
56) White, H. E., Phys. Rev. **36**, 1800, 1930.
57) Zeeman, P., E. Back und S. Goudsmit Zeitschr. f. Phys. **66**, 1, 1930.

II. Molekülspektren.

58) Badger, K. M., Phys. Rev. **35**, 1038, 1930.

59) Childs, W. H. J., und R. Mecke, Zeitschr. f. Phys. **64**, 162, 1930.
60) Elliott, A., Proc. Roy. Soc. A. **123**, 629, 1929.
61) Elliott, A., Proc. Roy. Soc. A. **127**, 638, 1930.
62) Elliott, A., Dissertation, Utrecht, 1930.
63) Gale, H. G., und G. S. Monk, Astr. J. **69**, 77, 1929.
64) Harvey, A., und F. A. Jenkins, Phys. Rev. **34**, 1286, 1929.
65) Harvey, A., und F. A. Jenkins, Phys. Rev. **35**, 789, 1930.
66) Hedfeld, K., und R. Mecke, Zeitschr. f. Phys. **64**, 151, 1930.
67) Heisenberg, W., Zeitschr. f. Phys. **41**, 239, 1927.
68) Heitler, W., und G. Herzberg, Naturwiss. **17**, 673, 1929.
69) Hund, F., Zeitschr. f. Phys. **42**, 93, 1927.
70) Kapuscinski, W., und J. G. Eymers, Proc. Roy. Soc. *A*. **122**, 58, 1929.
71) Loomis, F. W., Phys. Rev. **29**, 112, 1927.
72) Loomis, F. W., und R. W. Wood, Phys. Rev. **32**, 223, 1928.
73) Naudé, S. M., und A. Christey, Phys. Rev. **36**, 1800, 1931.
74) Ornstein, L. S., und W. R. van Wijk, Zeitschr. f. Phys. **49**, 315, 1928.
75) Rasetti, F., Nature **123**, 757, 1929.
76) Rasetti, F., Proc. Nat. Acad. Sci. **15**, 515, 1929.
77) Rasetti, F., Phys. Rev. **34**, 367, 1929.
78) Rasetti, F., Zeitschr. f. Phys. **61**, 598, 1930.
79) Richardson, O. W., und K. Das, Proc. Roy. Soc. *A* **122**, 688, 1929.
80) Snow, C. P., Proc. Roy. Soc. A. **128**, 294, 1930.
81) Weizel, W., Zeitschr. f. Phys. **54**, 321, 1929.
82) Wijk van, W. R., Zeitschr. f. Phys. **59**, 313, 1930.
83) Wijk, van, W. R., Dissertation, Utrecht, 1930.
84) Wurm, K., Zeitschr. f. Phys. **58**, 562, 1929.

III. Andere Erscheinungen.

85) Blackett, P. M. S., und F. C. Champion, Proc. Roy. Soc. A **130**, 380, 1931.
86) Bonhoeffer, K. F., und P. Harteck, Naturwiss. **17**, 182, 1929.
87) Bonhoeffer, K. F., und P. Harteck, Sitzb. preuß. Akad. 1929, 103.
88) Bonhoeffer, K. F., und P. Harteck, Zeitschr. f. phys. Chem. B **4**, 113, 1929.
89) Breit, G., Phys. Rev. **35**, 1447, 1939.
90) Dennison, D., Proc. Roy. Soc. A. **115**, 483, 1927.
91) Ellett, A., Phys. Rev. **35**, 588, 1930.
92) Mott, N. F., Proc. Roy. Soc. A. **126**, 259, 1930.

IV. Systematik der Kerneigenschaften.

93) Ehrenfest, P., und J. R. Oppenheimer, Phys. Rev. **37**, 333, 1931.
94) Kronig, R. de L., Naturw. **16**, 335, 1928.
95) Kronig, R. de L., Naturw. **18**, 205, 1930.
96) Gibbs, R. C., und P. G. Kruger, Phys. Rev. **37**, 656, 1931.
97) Kopfermann, H., Naturw. **19**, 320, 1931.
98) Schüler, H., und J. E. Keyston, Zeitschr. f. Phys. **68**, 174, 1931.
99) Schüler, H., und J. E. Keyston, Naturw. **19**, 320, 1931.
100) Tolansky, S., Proc. Roy. Soc. A **130**, 559, 1931.
101) Tolansky, S., Nature **127**, 595, 1931.
102) Wulff, I., Zeitschr. f. Phys. **69**, 70, 1931.

Natuurkundig Laboratorium der Rijks-Universiteit, Groningen.

(Eingegangen 22. April 1931.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Einige Versuche über die „magnetische Nachwirkung".

Von Heinrich Kühlewein.

In der Relaistechnik treten bei manchen Relaistypen, namentlich solchen mit hochpermeablen Legierungen, Verzögerungserscheinungen auf, die sich durch Wirbelströme oder Störungen technischer Art, wie Reibung, „Kleben" usw. vorläufig nicht erklären ließen. Es lag daher die Vermutung nahe, daß diese Störungen durch die sogenannte magnetische Nachwirkung hervorgerufen werden. Die bis jetzt erschienene Literatur über diese Erscheinung gibt nur Ergebnisse einzelner Materialien an, läßt aber noch keinerlei Gesetzmäßigkeit erkennen, während die Wirbelstromtheorien nur für kleine Feldstärken Gültigkeit haben. Im folgenden wurde versucht, die Gesetzmäßigkeit der magnetischen Nachwirkung bzw. die zeitliche Abhängigkeit der magnetischen Induktion für alle Magnetisierungszustände rein empirisch zu ermitteln.

Zur Klärung dieser Frage wurden zwei Methoden angewandt: 1. Aufnahme der Neukurve bei kommutiertem Gleichstrom mit variabler Kommutierungsfrequenz; 2. direkte Messung des zeitlichen Anstieges der Induktion mit Hilfe des Helmholtzpendels.

Aufnahme der Neukurve bei kommutiertem Gleichstrom mit variabler Kommutierungsfrequenz.

Mit einer normalen ballistischen Meßapparatur wird die Neukurve eines ferromagnetischen Materials durch Kommutieren des Primärfeldes bei steigender Feldstärke aufgenommen. Der durch eine solche Kommutierung hervorgerufene Induktionsstoß wird ballistisch gemessen und hieraus die Induktion B bei der betreffenden Feldstärke H errechnet. Bevor die eigentliche Messung gemacht wird, wird einige Male das Feld mittels eines Umschalters kommutiert, um eine gewisse Gleichmäßigkeit zu erreichen.

Vorversuche.

Es wurde nun ganz roh der Versuch gemacht, ob die Induktion von der vorhergehenden Kommutierungsfrequenz abhängig ist. Als Material

wurde vorerst Permalloy (78,5 Proz. *Ni*, 21,5 Proz. *Fe*) gewählt. Der Meßvorgang war also folgendermaßen (Fig. 1): nach etwa 20 Kommutierungen wurde der letzte Kommutierungsstoß gemessen.

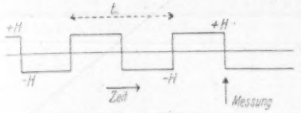

Fig. 1. Prinzip der Messung.

Die Zeit t eines Wechsels wurde mittels Stoppuhr bestimmt. In Frequenz umgerechnet, konnte von 0,03 bis 0,5 Hertz variiert werden.

Schon bei diesem Vorversuch kam deutlich zum Ausdruck, daß die Induktion mit steigender Kommutierungsfrequenz im Bereich des steilen Anstieges der Neukurve erheblich „nachhinkt". D. h. bei gleicher Feldstärke ist die Induktion bei einer Kommutierungsfrequenz von 0,5 Hertz deutlich meßbar kleiner als die Induktion bei einer vorhergehenden Kommutierungsfrequenz von 0,03 Hertz.

Um diese Erscheinung genauer untersuchen zu können, wurde folgende Apparatur aufgebaut:

Apparatur.

Eine von W. Jubitz im Forschungslaboratorium der Siemenswerke ausgearbeitete Apparatur für Dauerschaltversuche wurde für unsere Zwecke verwendet. Auf einer Achse, deren Umdrehungsgeschwindigkeit durch einen regulierbaren kleinen Elektromotor mit vorgelegtem Getriebe in weiten Grenzen variiert werden konnte,

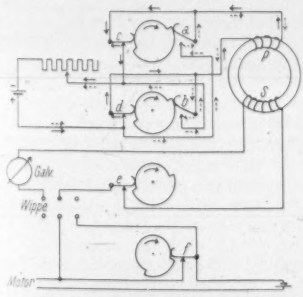

Fig. 2. Schaltung (schematisch).

wurden Nockenscheiben angebracht, die verschiedene Vakuumschalter betätigen konnten. Durch die Nocke wurde jeweils der betr. Schalter ausgeschaltet. Fig. 2 zeigt die Schaltung schematisch.

Zwei Nockenscheiben schalten eine halbe Umdrehung aus, eine halbe ein; sie sind auf der Achse genau gleichgestellt und besorgen den Kommutierungsvorgang des magnetisierenden Feldes mit 4 Vakuumschaltern (a, b, c, d). Es sind immer zwei ein- (bei der Stellung in der Zeichnung die linken c, d) und zwei ausgeschaltet. Jede Umdrehung der Achse bewirkt also einen vollständigen Wechsel. Durch die Änderung der Umdrehungsgeschwindigkeit konnte so die Kommutierungsfrequenz von 0,03125 bis 8,0 Hertz variiert werden; anders ausgedrückt: eine Umdrehung betrug im langsamsten Falle 32, im schnellsten 0,125 Sekunden.

Von zwei weiteren Nockenscheiben betätigte die eine, die ebenfalls eine halbe Umdrehung ausschaltete, einen Vakuumschalter (e) im Galvanometerkreis, die andere, die nur eine viertel Umdrehung ausschaltete, einen Vakuumschalter (f), der den Elektromotor, der die Apparatur antrieb, abschaltete. Im Galvanometer und im Motorkreis war außerdem eine Quecksilberwippe, die durch Hand betätigt wurde, folgendermaßen eingebaut: Der eine Teil der Wippe war in Serie mit dem Vakuumschalter des Galvanometerkreises geschaltet, während der andere Teil parallel zum Vakuumschalter des Motorkreises geschaltet war. War, nach Fig. 2, die Wippe nach rechts gelegt, so war unabhängig von der Drehung der Nockenscheiben dauernd der Galvanometerkreis unterbrochen und der Motorkreis geschlossen. Wurde nun die Wippe nach links gelegt, etwa bei der Stellung der Nockenscheiben, wie sie die Zeichnung wiedergibt, so war zuerst das Galvanometer und der Motor eingeschaltet. Nach etwa einer achtel Umdrehung erfolgte die Kommutierung des Feldes von $-H$ nach $+H$, kurz vor dieser Kommutierung wurde das Galvanometer ausgeschaltet. Nach fünfachtel Umdrehungen erfolgte die zweite Kommutierung, von $+H$ nach $-H$ und der Induktionsstoß wurde vom Galvanometer, das kurz vor der zweiten Kommutierung eingeschaltet wurde, aufgenommen. Kurz nach der zweiten Kommutierung schaltete der Motor ab, die Nockenscheiben verblieben in dieser Lage und das $-H$-Feld blieb bei eingeschaltetem Galvanometer bestehen.

Es wurde noch eine einfache Bremsvorrichtung angebracht, die mit dem Abschalten des Motors in Tätigkeit trat, damit bei größeren Umdrehungsgeschwindigkeiten durch das Auslaufen des Motors die Achse mit den Nockenscheiben auch im richtigen Augenblick angehalten wurde.

Messung.

Die Messung eines Punktes geschah also folgendermaßen: Nach mehreren Wechseln in der gewünschten Frequenz bei einer bestimmten Feld-

stärke wurde die Wippe von rechts nach links gelegt (Fig. 3). Das Galvanometer registrierte nur die letzte Kommutierung von $+H$ nach $-H$. Die Neukurve bei einer bestimmten Frequenz wurde erhalten, indem zuerst die gewünschte

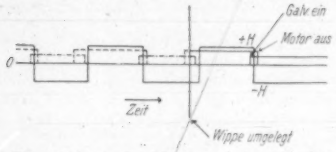

Fig. 3. Gang der Messung (schematisch).

Frequenz eingestellt wurde, darauf wurde die Probe entmagnetisiert; schließlich wurden die einzelnen Punkte bei steigender Feldstärke nach dem obigen Verfahren aufgenommen.

Berechnung.

Ist die Kommutierungsfrequenz so klein, daß die Zeit genügt, um jeweils für ein bestimmtes H den zeitlichen Endwert für B zu erreichen, so messen wir bei der Kommutierung ballistisch den Wert $2a$, wenn wir unter a den zeitlichen Endwert der Induktion bei einer bestimmten Feldstärke verstehen. Wird nun die Kommutierungsfrequenz größer, so daß der zeitliche Endwert der Induktion nicht mehr erreicht wird, so wird sich der Wert der Induktion etwa zwischen $B = +x$ und $-x$ bewegen. Messen wir nun den letzten Kommutierungsvorgang (Fig. 3), so werden wir aus dem Ausschlag des ballistischen Galvanometers den Wert für $B = x + a$ erhalten. Da a bekannt ist, kann man x errechnen.

Für diese einfache Messung der Induktionswerte in Abhängigkeit von der Frequenz bzw. Zeit ist nur folgende triviale Voraussetzung gemacht: Befindet man sich bei einem ferromagnetischen Material während des Magnetisierungsvorgangs auf der Neukurve, bei einer bestimmten Feldstärke H, so wird nach einer gewissen Zeit die zugehörige Induktion B erreicht werden. Wird nun die Feldstärke innerhalb der Grenzen $+H$ bis $-H$ in beliebiger Weise variiert, so muß auch wieder, wenn die ursprüngliche Feldstärke H wieder eingestellt ist, die Induktion B nach einer bestimmten Zeit wieder erreicht sein. Mit anderen Worten, jede Hystereseschleife muß sich bei Erreichung des Feldausgangspunktes, der bei der höchsten bisher vorgekommenen Feldstärke liegt, wieder schließen.

Das magnetisierende Feld.

Das Feld wurde durch kommutierten Gleichstrom erzeugt, wie schon mehrfach erwähnt wurde. Die angelegte Spannung wurde so hoch gewählt, daß die Selbstinduktion der Probe im Vergleich zu den Vorschaltwiderständen vernachlässigt werden konnte, d. h. der „Wechsel"-Strom war tatsächlich vollständig im Vergleich zu den in Frage kommenden Zeiten rechteckig. Dies wurde auch durch oszillographische Aufnahmen bestätigt.

Fehlerdiskussion.

Das Galvanometer wird eingeschaltet kurz vor der letzten Kommutierung. Hat nun die Induktion den zu der vorangegangenen Feldkommutierung gehörigen Endwert noch nicht voll erreicht, so erfährt das ballistische Galvanometer noch einen kleinen Impuls durch den noch vorhandenen Induktionsanstieg während der Zeit, die vergeht zwischen der Einschaltung des Galvanometers und der interessierenden Kommutierung. Es wurde versucht, diesen Fehler durch möglichst nahes Zusammenrücken dieser beiden Schaltvorgänge möglichst klein zu halten. Er dürfte sich aber trotzdem, namentlich bei den höheren Kommutierungsfrequenzen, bemerkbar machen, denn einem beliebig nahen Zusammenrücken ist durch die mechanische Trägheit der Vakuumkontakte eine Grenze gesetzt. Aus diesem Grunde streuen wahrscheinlich die Meßpunkte bei höheren Frequenzen, wie weiter unten beschrieben wird, erheblich.

Versuche.

Versuchsreihen wurden an folgenden Materialien gemacht:

Reines Permalloy, abgeschreckt.
„ „ langsam abgekühlt.
Eisen-Nickel-Legierung (40 Proz. *Ni*, 60 Proz. *Fe*) abgeschreckt.
Eisen-Nickel-Legierung (40 Proz. *Ni*, 60 Proz. *Fe*) langsam abgekühlt,
Perminvarlegierung (35 Proz. *Ni*, 35 Proz. *Fe*, 30 Proz. *Co*) langsam abgekühlt,
Holzkohleneisen, langsam abgekühlt.

Die Materialien waren durchweg Blechringe mit einer Blechdicke von etwa 0,3 mm. Es zeigte sich das überraschende Resultat: nur das abgeschreckte Permalloy zeigte in unserem Frequenzbereich eine starke magnetische Nachwirkung. Bei den anderen Materialien konnte nur bei der abgeschreckten Eisen-Nickellegierung außerhalb der Fehlergrenzen ein frequenzabhängiger Verlauf der Magnetisierung festgestellt werden.

Im nachstehenden werden die besonders charakteristischen Meßergebnisse an Permalloy mitgeteilt:

Fig. 4 zeigt die Neukurven bei verschiedenen Kommutierungsfrequenzen, Fig. 5 die entspre-

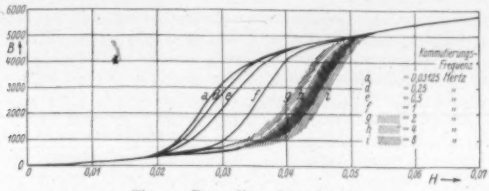

Fig. 4. Permalloy abgeschreckt.

chenden Permeabilitätskurven. Hieraus ist zu sehen, daß die magnetische Nachwirkung nur in einem bestimmten Feldstärkenbereich auftritt. Mit steigender Frequenz verschiebt sich der steil ansteigende Teil der Neukurve nach höheren Feldstärken. Bei sehr kleinen Frequenzen ist die Nachwirkung noch sehr gering, d. h. also, die Zeit zwischen zwei Kommutierungen ist noch so groß, daß der zeitliche Endwert der Induktion immer erreicht wird. Wird die Frequenz höher, so wird dieser Wert nicht mehr erreicht, die Induktion bleibt bei gleicher Feldstärke kleiner.

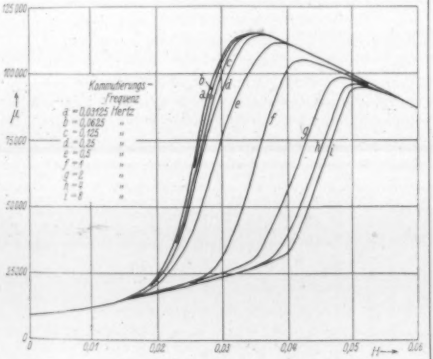

Fig. 5. Permalloy abgeschreckt.

Bei den Frequenzen 2 bis 8 Hertz streuen die Meßresultate im Steilanstieg sehr stark. Dies ist durch die Schraffierung in der Zeichnung (Fig. 4) kenntlich gemacht (siehe Fehlerdiskussion). In Fig. 5 und in den nachfolgenden Figuren sind für die starken Streuungen Mittelwerte eingesetzt. In allen anderen Fällen liegen die Meßpunkte innerhalb der Strichdicke.

Folgerungen.

Es scheint aus den Figuren 4 und 5 hervorzugehen, daß mit steigender Frequenz schließlich ein Endwert der magnetischen Nachwirkung erreicht wird. Hierfür zur Erläuterung dient die Fig. 6. Als Abszisse ist die Kommutierungsfrequenz in logarithmischen Maßstabe, als Ordinate die Induktion B (in Gauss) aufgetragen; Parameter ist die Feldstärke. Bis zu einer Feldstärke von etwa 0,016 Gauß ist die Induktion unabhängig von der Frequenz. Wir haben es in diesem Bereich hauptsächlich nur mit reversiblen Magnetisierungsprozessen zu tun, d. h. es finden noch keine oder nur wenig „Umklappungen" statt. Bei höheren Feldstärken macht sich dann eine deutliche Abhängigkeit der Induktion von der Frequenz bemerkbar. Die irreversiblen Prozesse,

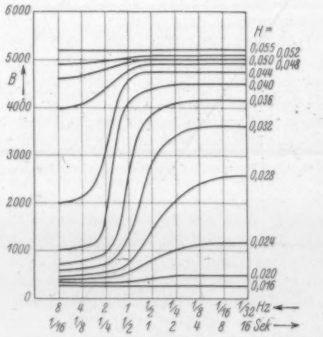

Fig. 6. Permalloy abgeschreckt: $B = f$(Kommutierungsfrequenz).

die Umklappungen, beginnen mit steigender Frequenz erst bei höheren Feldstärken. Schließlich wird bei einer Feldstärke von etwa 0,055 Gauß die obere Grenze erreicht, bei der die Induktion wieder unabhängig von der Frequenz in dem uns zur Verfügung stehenden Bereich ist.

Der interkristalline Vorgang dürfte demnach etwa folgender sein: Im Innern eines Kristalls sind immer Gruppen gleichgelagerter Molekularmagnete vorhanden. Bei einer bestimmten Feldstärke wird zuerst ein Molekularmagnet in die Magnetisierungsrichtung umklappen; hierdurch wird, bei gleichbleibender äußerer Feldstärke, das innere magnetisierende Feld vergrößert. Jetzt werden weitere Umklappungen erfolgen, das

innere Feld wird wieder größer usf. Der eigentliche Magnetisierungsvorgang verläuft also zuerst „anschwellend", um dann auf den Endzustand in einer Sättigungskurve überzugehen. Dieser Vorgang ist ebenfalls in Fig. 6 zu erkennen, wenn als Abszisse statt der Frequenz die entsprechenden Zeiten, d. h. die Zeit zwischen zwei Kommutierungen, eingesetzt wird. Die Geschwindigkeit des Umklapprozesses ist nun noch feldabhängig. Je höher das Feld ist, um so früher setzt die erste Umklappung ein, und um so rascher folgen die anderen.

Direkte Messung des zeitlichen Anstieges der Induktion mit Hilfe des Helmholtzpendels.

Mit dieser zweiten Meßmethode war es möglich, auch Materialien mit wesentlich kleinerer magnetischer Nachwirkung zu untersuchen, da sie gestattet, erheblich kleinere Zeiten zu messen.

Apparatur.

Der Versuchsaufbau bei der zweiten neuen Versuchsreihe ist ganz ähnlich, wie er schon von L. Holborn[1]) benutzt wurde. Das Prinzip ist folgendes: bei einer bestimmten Feldstärke wurde zuerst — zum Ausgleich — mehrmals kommutiert, dann das Feld bei $-H$ so lange bestehen gelassen, daß mit Sicherheit der zu diesem Feld gehörige Induktionswert erreicht war: nun wurde von $-H$ nach $+H$ kommutiert und dann nach einer bestimmten Zeit t das ballistische Galvanometer eingeschaltet. Die letztgenannte Kommutierung und das Einschalten des Galvanometers wurde durch ein Helmholtz-Pendel besorgt. Das Galvanometer registriert also den Zuwachs, den die Induktion noch nach der Zeit t erfährt (B_{gemessen}). Wenn nun vor dieser Messung der Induktionsendwert (B_{End}) bei der betreffenden Feldstärke durch normale ballistische Messung bestimmt worden war, so ist der Wert der Induktion nach der Zeit t:

$$B_t = B_{\text{End}} - B_{\text{gemessen}}.$$

Bei Variierung der Zeit kann also der zeitliche Anstieg der Induktion aufgenommen werden.

Als Material wurden ebenso wie bei den vorigen Versuchen ausschließlich Blechringe von verschiedener Stärke verwendet.

Fehlerdiskussion.

Die Kommutierung des Feldes durch das Helmholtz-Pendel erfolgte von $-H$ nach O und dann von O nach $+H$. Die Zeit, die das Feld brauchte, bis jede dieser beiden Änderungen vollständig war, war erheblich unterhalb der Meßgenauigkeit, wie oszillographische Aufnahmen bestätigten. Jedoch betrug die Zeit, während der das Feld O war, infolge der Trägheit der Kontaktgebungen, etwa 4 Millisekunden. Die Zeitmessung rechnete jedoch von dem Moment des Umschlages von $-H$ nach O an, so daß also sämtliche Zeitmessungen einen konstanten Fehler von etwa 4 Millisekunden aufweisen. Bei Materialien mit kleiner Nachwirkung macht sich dieser Fehler störend bemerkbar.

Der Einfachheit und Übersichtlichkeit der Darstellung wegen wurden sämtliche B_t-Werte durch zwei dividiert. Jeder ermittelte B_t-Wert stellt die Induktionsänderung dar, die nach der Zeit t auf dem Wege von $-B$ nach $+B$ erreicht wurde. Der Induktionsendwert B_{End} ist aber die tatsächliche Induktion gegen $B = O$. Bei der Division durch zwei ist es daher möglich, ohne den charakteristischen Verlauf zu stören, die B-Zeitkurven aller Feldstärken auf ein Koordinatensystem zu bringen.

Versuche.

a) Permalloy abgeschreckt.

In Fig. 7 ist eine Versuchsreihe an reinem, abgeschrecktem Permalloy wiedergegeben. Abszisse ist die Zeit in logarithmischem Maßstabe, Ordinate die Induktion B_t und Parameter ist das magnetisiernde Feld H. Meßpunkte wurden

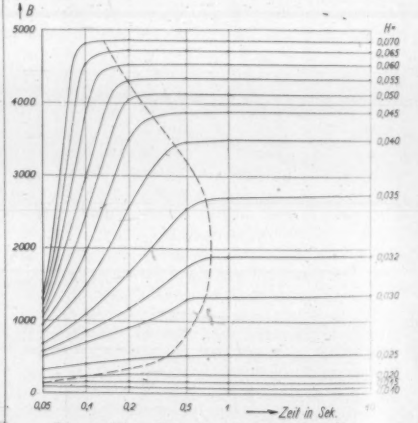

Fig. 7. Permalloy abgeschreckt. $B = f(t)$.

aufgenommen bei 0,005; 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1 und 10 Sekunden, sie sind von 0,05 Sekunden aufwärts in der Figur eingezeichnet. Es ist deutlich zu erkennen, daß bei kleinen wie bei großen Feldstärken die Induktion in kürzerer

[1]) L. Holborn, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, 1896, S. 173.

Zeit ihren Endwert erreicht hat, als bei mittlerer Feldstärke. D. h. die Zeit, die die Induktion benötigt, um ihren Endwert zu erreichen, geht

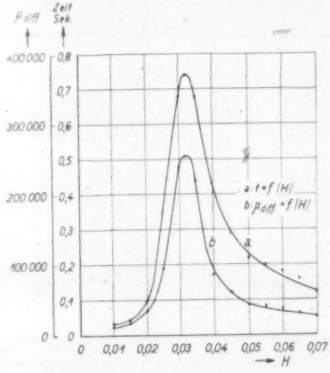

Fig. 8. Permalloy abgeschreckt.

bei steigender Feldstärke über ein ausgeprägtes Maximum. Die Zeiten, bei welchen der Induktionsendwert jeweils etwa erreicht ist, sind in der Figur gestrichelt verbunden. In Fig. 8 ist diese Zeit in Abhängigkeit vom magnetisierenden Feld als Kurve *a* eingezeichnet.

Es wurde nun ein Zusammenhang zwischen dieser gemessenen Zeit und den Daten der normalen Magnetisierungskurve gesucht. Ein solcher ergibt sich, wenn man den jeweiligen Anstieg der statischen Magnetisierungskurve, die durch Kommutierung erhalten wurde, betrachtet und hieraus dB/dH, d. h. die differentielle Permeabilität bestimmt. In Fig. 8 ist diese als Kurve *b* aufgetragen. Das Maximum der differentiellen Permeabilität stimmt genau mit der Lage des Maximums der gemessenen Zeiten überein. Auf diesen Zusammenhang wird weiter unten eingegangen werden. Fig. 9 gibt entsprechend Fig. 4 die Neukurve wieder, wobei *B* jeweils die Induktion darstellt, die nach den Zeiten 0,005; 0,01; 0,02; 0,05 und 0,1 Sekunden bereits erreicht ist. Fig. 10 stellt die entsprechenden μ-Kurven dar.

Für die Praxis in der Relaistechnik ergibt sich hieraus folgendes: Wird ein Relais mit einem Permalloykern mit einer Feldstärke von etwa 0,05 Oerstedt betrieben, so ist für sehr langsame Schaltgeschwindigkeiten ein μ von etwa 80000 zu erwarten, beträgt jedoch die Schaltgeschwindigkeit nur 20 Millisekunden, so beträgt die wirksame Permeabilität nur etwa 25 000 (Fig. 10, Kurve *a* und *c*).

b) Desgl. langsam abgekühlt.

Fig. 11 gibt eine Versuchsreihe an langsam abgekühltem Permalloy entsprechend Fig. 8 wieder. Die Zeit bis zum Endwert der Induktion geht mit wachsender Feldstärke ebenfalls wieder über ein Maximum, jedoch liegt dieses entsprechend der erheblich kleineren differentiellen Permeabilität bei wesentlich kleineren Zeiten als

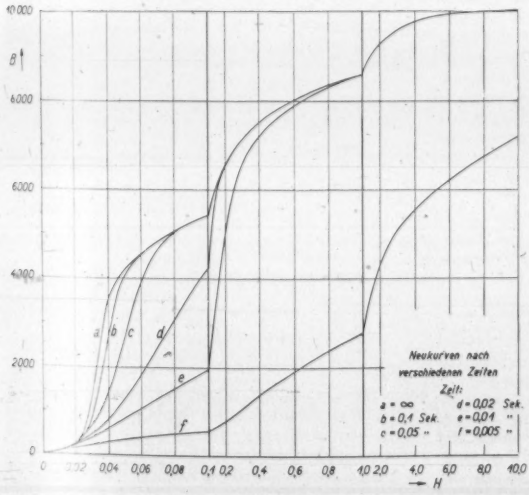

Fig. 9. Permalloy abgeschreckt.

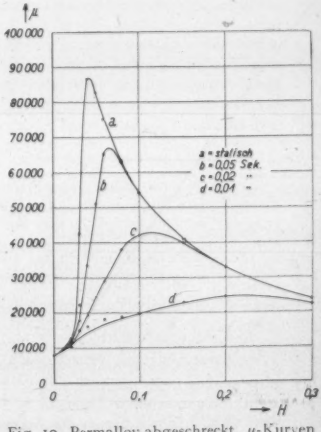

Fig. 10. Permalloy abgeschreckt. μ-Kurven bei verschiedenen Zeiten.

bei abgeschrecktem Material. Das Maximum von μ_{diff} stimmt wieder mit dem Maximum der Zeit überein. Die Nachwirkungszeiten des langsam

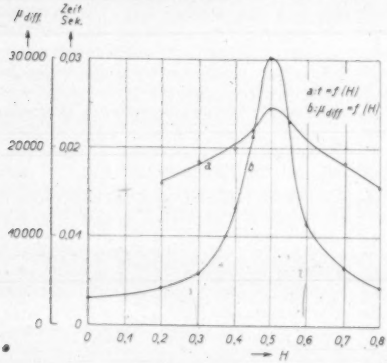

Fig. 11. Permalloy langsam abgekühlt.

abgekühlten Permalloys sind jedoch schon so klein (im Maximum nur 24 Millisekunden), daß sich der oben genannte Fehler von 4 Millisekunden schon sehr störend bemerkbar macht.

c) Eisen-Nickellegierung (40 Proz. *Ni*, 60 Proz. *Fe*), abgeschreckt:

Bei abgeschrecktem Material betrug die maximale Zeit etwa 0,08 Sekunden. Das Maximum stimmt wieder mit dem Maximum des μ_{diff} überein. Bei diesem Material zeigte sich jedoch kein kontinuierliches Ansteigen der Induktion, sondern der Anstieg ging, wie mehrere Versuche zeigten, deutlich stufenweise vor sich. Ob diese Erscheinung reell ist, soll erst noch an weiteren Materialien geprüft werden. Es wird daher vorerst auf diesen Versuch nicht weiter eingegangen.

d) Desgl., langsam abgekühlt:

Bei langsam abgekühltem Material traten diese Stufen nicht auf. Der Magnetisierungsvorgang in Abhängigkeit von der Zeit verlief ähnlich wie bei den Versuchen an Permalloy. Auch hier verläuft die gemessene Zeit in Abhängigkeit vom magnetisierenden Feld parallel mit der differentiellen Permeabilität. (Fig. 12.)

e) Holzkohleneisen:

Bei Holzkohleneisen sind sowohl für langsam abgekühltes, wie auch für abgeschrecktes Material die gemessenen Zeiten nicht über 20 Millisekunden. Die differentielle Permeabilität beträgt im Maximum nur etwa 4000. Jedoch liegen

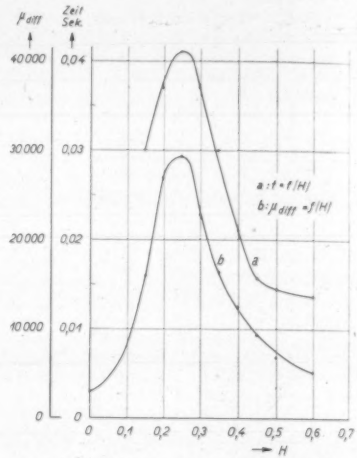

Fig. 12. 40 Proz. *Ni*, 60 Proz. *Fe*, langsam abgekühlt.

bei beiden Wärmebehandlungen die Maxima der differentiellen Permeabilität und der gemessenen Zeiten bei gleicher Feldstärke.

f) Permalloy mit Silizium:

Nach den bisherigen Versuchen schien es wahrscheinlich, daß die Nachwirkungserscheinungen um so stärker hervortreten, je steiler der Anstieg der Magnetisierungskurve ist. Es wurde daher noch ein Permalloy mit einem Zusatz von 1,5 Proz. Silizium im abgeschreckten Zustande untersucht.

Fig. 13 zeigt wieder den Verlauf der differentiellen Permeabilität und der gemessenen Zeit

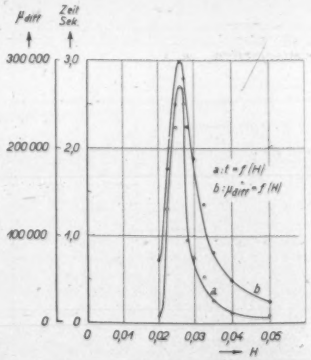

Fig. 13. Permalloy mit 1,5 Proz. *Si* abgeschreckt.

in Abhängigkeit von der Feldstärke. Beide Kurven gehen über ein sehr steiles Maximum, dessen Spitze für beide Kurven wieder bei gleicher Feldstärke liegt.

Ergebnisse.

Aus sämtlichen Versuchen geht eindeutig hervor, daß die Zeit, die benötigt wird, um bei einer bestimmten Feldstärke den Endwert der zugehörigen Induktion zu erreichen mit wachsender Feldstärke über ein Maximum geht. Dieses Maximum fällt bei allen Versuchen mit dem Maximum der differentiellen Permeabilität zusammen. Wertet man den Versuch der ersten Meßmethode entsprechend aus, so erhält man, wie Fig. 14

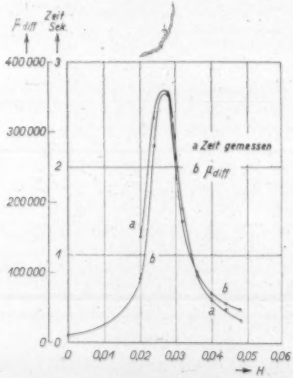

Fig. 14. Permalloy abgeschreckt, nach der ersten Meßmethode.

zeigt, das nämliche Ergebnis. Bei den Materialien, die eine große magnetische Nachwirkung besitzen, die also für unsere Meßgenauigkeit am günstigsten liegen, kann man näherungsweise behaupten, daß der Zeitgang mit wachsender Feldstärke proportional dem Verlauf der differentiellen Permeabilität ist. Es gilt also:

$$\text{Zeit} = C_1 \cdot \mu_{\text{diff}}. \qquad (1)$$

Diese Konstanten C_1 wurden für die Versuche an Permalloy (*a*), 40 prozentigem Nickeleisen (*d*) und Permalloy mit Silizium (*f*) für sämtliche *H*-Werte errechnet und dann gemittelt. Tabelle I gibt diesen Vorgang für Versuch a wieder. Bei Berechnung wurde die nachträglich genaue Zeiteichung des Helmholtzpendels mit einem Schleifenoszillographen berücksichtigt. In sämtlichen Figuren sind auf Grund dieser Eichung die Zeitwerte mit 1,087 zu multiplizieren.

Tabelle I.
Permalloy abgeschreckt. (Versuch a.)

H	μ_{diff}	Zeit$_{\text{gem.}}$ in Sek.	$C_1 = \frac{\text{Zeit}}{\mu_{\text{diff}}}$
0,01	12500	0,033	$2{,}64 \cdot 10^{-6}$
0,015	17700	0,044	2,49
0,02	35100	0,098	2,79
0,025	94800	0,35	3,69
0,03	239000	0,68	2,85
0,032	254000	0,74	2,91
0,035	221000	0,68	3,08
0,04	86200	0,43	4,98
0,045	61100	0,29	4,75
0,05	43300	0,22	5,07
0,055	41700	0,20	4,79
0,06	37700	0,18	4,77
0,065	31300	0,16	5,11
0,07	26800	0,12	4,47
		Mittel:	$3{,}13 \cdot 10^{-6}$
		korrigiert:	$3{,}40 \cdot 10^{-6}$

Die Beziehung (1) erinnert an die Wolmansche[1]) Formel für die Grenzfrequenz (fg)

$$fg = \frac{\varrho}{\pi^2 \cdot d^2 \cdot \mu_0},$$

wobei ϱ der spezifische Widerstand und d die Blechdicke ist. Sie gilt jedoch nur für kleine Felder. Zu einer ähnlichen Beziehung gelangt F. Walter[2]) bei der Untersuchung über die elektrische Wellenausbreitung in Metallen.

Es galt daher noch zu untersuchen, wie die Blechdicke und der spez. Widerstand in die Konstante C_1 eingeht.

Der spez. Widerstand der bis jetzt untersuchten Materialien bewegte sich bereits zwischen 0,19 und $0{,}66 \cdot 10^3$ C. G. S. Es wurde daher noch ein Material mit verschiedener Blechdicke untersucht.

g) Permalloy mit verschiedener Blechdicke. Zur Untersuchung kam Material mit einer Blechdicke im Mittel von 0,505, 0,359 und 0,20 mm. Die Abweichung der Dicke eines einzelnen Blechringes vom Mittel betrug etwa $\pm$ 2 Proz.

Bei den drei verschiedenen Blechdicken verliefen wieder die *H*-Zeitkurven proportional mit der differentiellen Permeabilität. In Tabelle II sind die ermittelten Werte der Konstanten C_1

Tabelle II.
Permalloy bei verschiedener Blechdicke.

d cm	C_1	C_1/d^2
0,0505	$7{,}60 \cdot 10^{-6}$	$2{,}98 \cdot 10^{-3}$
0,0359	4,07	3,16
0,020	1,22	3,06

1) W. Wolmann: Ztschr. f. techn. Phys. **10**, S. 595, 1929.
2) F. Walter, Wissensch. Veröffentl. d. Siemens-Konzerns 8, S. 115, 1929.

Tabelle III.

Versuch	$C_1 = \frac{\text{Zeit}}{\mu_{\text{diff}}}$ Mittelwert	Spez. Widerstand ϱ CGS	Blechdicke cm	Blechbreite cm	$C_2 = \frac{C_1 \cdot \varrho}{\pi^2 \cdot d^2}$
a	$3{,}40 \cdot 10^{-6}$	$0{,}19 \cdot 10^{-3}$	0,031	1,0	6,82
d	1,38	0,66	0,036	1,25	7,13
f	4,14	0,238	0,037	0,5	7,28
g	7,60	0,19	0,0505	0,75	5,82
g	4,07	0,19	0,0359	0,75	6,09
g	1,22	0,19	0,020	0,75	5,74
					Mittel: 6,48

eingetragen. Wird C_1 durch d^2 dividiert, so ergibt sich, daß in der allgemeinen Konstanten C_1 d^2 enthalten sein muß, da C_1/d^2 für alle Dicken konstant ist.

In Tabelle III sind nun für alle Versuche, die Nachwirkungszeiten über 30 Millisekunden ergaben, also Anspruch auf beste Meßgenauigkeit haben, die ermittelten Konstanten C_1, der spez. Widerstand ϱ und die Blechdicke d aufgetragen.

Unter der Annahme, daß die Zeit, die die Induktion benötigt, um ihren Endwert zu erreichen, reziprok der Grenzfrequenz sein muß, und mit der empirisch gefundenen Erweiterung auf den ganzen Feldbereich durch Einführung der differentiellen Permeabilität ergibt sich:

$$\text{Zeit} = \frac{C_2 \cdot \pi^2 \cdot d^2}{\varrho} \cdot \mu_{\text{diff}}, \qquad (2)$$

wobei

$$C_2 = \frac{C_1 \cdot \varrho}{\pi^2 \cdot d^2}$$

ist.

Zur Prüfung dieser Gleichung ist für alle Versuche die Konstante C_2 ausgerechnet und in Tabelle III angegeben worden. Der Wert hierfür ist bei Berücksichtigung der Versuchsbedingungen gut konstant, so daß man bei einem Fehler von etwa $\pm$ 10 Proz. die Zeit, die die Induktion benötigt, um bei der Durchlaufung einer halben Hystereseschleife von einem Endwert zum andern zu gelangen, angeben kann, durch:

$$\text{Zeit} = \frac{6{,}48 \cdot \pi^2 \cdot d^2}{\varrho} \cdot \mu_{\text{diff}}. \qquad (3)$$

Diese Beziehung gilt für jede beliebige Feldstärke.

Mit Hilfe dieser empirisch gefundenen Gleichung (3) ist eine Beziehung gegeben zwischen der Neukurve und der sogenannten, „magnetischen Nachwirkung". Ist die Neukurve eines Materials bekannt, so kann sofort für jede Feldstärke die Nachwirkungszeit mit guter Genauigkeit angegeben werden. Ist z. B. bei $H = 0{,}035$ Oersted:

$\mu_{\text{diff}} = 221\,000$
$d \quad = 0{,}031$ cm
$\varrho \quad = 0{,}19 \cdot 10^3$ CGS, so ist die Nachwirkungszeit $= 0{,}714$ Sekunden.

Die in der ersten Versuchsreihe bei kommutiertem Gleichstrom erhaltenen Zeitwerte (Fig. 14) sind im Vergleich zu den Zeiten, die mit Hilfe des Helmholtzpendels ermittelt wurden, erheblich höher. Wir haben es dort mit Material zu tun, das einer fortwährenden magnetischen „Beanspruchung" ausgesetzt ist. Stichversuche bei mechanisch erschüttertem Material oder bei Überlagerung kleiner Wechselfelder ergaben bei Messung mit dem Helmholtzpendel ebenfalls, trotz annähernd gleichbleibender differentieller Permeabilität, Zeiten, die bis zu einer Größenordnung höher lagen als bei normalen Verhältnissen. Auf diese Versuche wird später noch einmal zurückgegriffen werden.

Zusammenfassung.

Es werden zwei Methoden angegeben, zur Bestimmung des zeitlichen Verlaufs der Magnetisierung.

Dabei ergibt sich, daß die Zeit, die die Induktion benötigt, um bei einem plötzlich eingeschalteten Feld ihren zu diesem Feld gehörigen Endwert zu erreichen, mit wachsender Feldstärke über ein Maximum geht. Der Verlauf dieser Zeit in Abhängigkeit von der Feldstärke ist proportional zum Verlauf der differentiellen Permeabilität.

Es wird eine empirisch ermittelte Formel angegeben, mit welcher bei bekannter Neukurve eines Materials bei beliebiger Feldstärke die Nachwirkungszeit errechnet werden kann.

Berlin-Siemensstadt, Forschungslaboratorium des Siemens-Konzerns, März 1931.

(Eingegangen 13. April 1931.)

Elektrische Figuren auf photographischen Platten in Flüssigkeiten.

Von Karl Przibram.

Mit Tafel V.

Im Hinblick auf das in letzter Zeit wieder zunehmende Interesse an den elektrischen Figuren[1]) und insbesondere auf eine Arbeit von Y. Toriyama[2]) über elektrische Staubfiguren in schlechtleitenden Flüssigkeiten seien hier photographische Figuren in Flüssigkeiten wiedergegeben, die schon in den Jahren 1918 und 1919 aufgenommen, aber bisher nur anmerkungsweise[3]) erwähnt worden sind.

Die Spannungsstöße wurden von der üblichen Toeplerschen Anordnung geliefert und einer Drahtelektrode zugeführt, deren, aus einer übergeschobenen Glasröhre herausragendes, Ende auf der Schichtseite einer photographischen Platte aufruhte. Die Platte lag in einer Entwicklerschale aus Porzellan von etwa 5 mm Dicke, und diese auf einer mit dem anderen Pole verbundenen Metallplatte. Die Entwicklerschale wurde mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt.

Die 3mal vergrößerten Figuren 1. (positiv) und 2. (negativ) (s. Taf. V) sind in Isoamylalkohol, 3. (positiv) und 4. (negativ) in buttersaurem Isobutyl, alle bei etwa 80 kV, erhalten worden. Sie sind als Büschel- und nicht als Streifenentladungsfiguren (Polbüschel) anzusprechen. Die scheinbaren Unterbrechungen der Figuren, bzw. ihr stellenweise verschwommenes Aussehen rühren daher, daß hier die Entladungsbahnen nicht so wie bei Aufnahmen in Gasen infolge des Unterschiedes der Dielektrizitätskonstanten an die Platte angepreßt werden, sondern zeitweilig von ihr abspringen.

Die auf manchen Bildern zu sehenden, hellen, perlschnurartig angeordneten Pünktchen (s. besonders Fig. 3) rühren von Gasblasen her, die durch Zersetzung der Flüssigkeit durch die Entladung entstehen. Die dunklen Flecken auf den Bildern im Amylalkohol haben mit der Entladung nichts zu tun, sondern rühren von Tröpfchen her, die trotz Abwaschung der Platte vor dem Entwickeln noch an ihr haftengeblieben waren.

Die polaren Unterschiede äußern sich vor allem in der Größe der Figuren. In Amylalkohol sind die negativen Figuren ausgedehnter als die positiven[1]) in buttersaurem Isobutyl gilt das Umgekehrte, so wie in Luft. Diese Unterschiede sind durch wiederholte Aufnahmen und zahlreiche subjektive Beobachtungen sichergestellt.

In älteren Arbeiten[2]) habe ich den Potentialverlauf bei der Elektrizitätsleitung zwischen parallelen Plattenelektroden in einer größeren Zahl schlechtleitender Flüssigkeiten untersucht und charakteristische Unterschiede im Verhältnis Kathodenfall zu Anodenfall gefunden, derart, daß dieses Verhältnis für manche Flüssigkeiten größer, für andere kleiner als 1 ist, und habe dies mit den polaren Unterschieden der Entladung in diesen Flüssigkeiten, insbesondere der bei gegebener Spannung maximalen Funkenlänge zwischen Spitze und Platte in Beziehung gebracht[3]).

Die Ausdehnung der Entladung von einer Spitze aus sollte bei jenem Vorzeichen derselben größer sein, für welches an Plattenelektroden der kleinere Potentialfall stattfindet, wie dies ja in Luft zutrifft. In der Tat wurde in Isoamylalkohol,

1) Zusammenfassende Berichte: K. Przibram, Handb. d. Phys., XIV, Kap. 8, 1925. G. Mierdel, Handb. d. Experimentalphysik, XIII/3, 282 u. f., 1929. Ferner P. O. Pedersen, K. Dansk. Vidensk. math. fys. Medd. **8**, Nr. 10, 1929. Erwin Marx, Arch. f. Elektrot. **24**, 61, 1930. C. E. Magnusson, Journ. A. I. E. E., Juni 1930. A. v. Hippel, Zeitschr. f. Phys. **67**, 707, 1931.

2) Y. Toriyama, Phys. Rev. **37**, 619, 1931. Vgl. hierzu aber auch schon E. Mach und S. Doubrava, Wien. Ber. (IIa), **80**, 331, 1879; Wied. Ann. **9**, 61, 1880.

Anmerkung bei der Korrektur: Eine prächtige Gleitbüschelfigur unter Öl gibt Erwin Marx in einer Publikation (ETZ. 1930, 1161), die mir erst während der Drucklegung dieser Notiz zur Kenntnis kam.

3) K. Przibram, Wien. Ber. (IIa) **127**, 399, 1918.

1) Daß in manchen Flüssigkeiten die negative Figur größer ist als die positive, haben schon S. Doubrava (Untersuchungen über die beiden elektrischen Zustände, Prag, 1881) und A. Szathmari (Beibl. zu Pogg. Ann. **5**, 679, 1881) gefunden. Von Gasen zeigt Kohlendioxyd (vielleicht nicht ganz rein) unter Umständen diese Umkehrung (E. Reitlinger, Wien. Ber. [IIa] **43**, 531, 1861, K. Przibram, ebenda; **108**, 1161, 1899; Physik. Zeitschr. **21**, 480, 1920).

2) K. Przibram, Wien. Ber. (IIa) **114**, 1461, 1905; Physik. Zeitschr. **5**, 574, 1904; **6**, 276, 473, 1905). In dem zusammenfassenden Berichte von A. Gyemant (Physik. Zeitschr. **30**, 35, 1929) über die elektrische Festigkeit flüssiger Isolierstoffe ist bei der Erwähnung meiner Versuche ein Versehen unterlaufen, das hier zu berichtigen gestattet sei. Ich hatte gefunden, daß im allgemeinen die maximale Funkenlänge bei gegebener Spannung zwischen Spitze und Platte in einer homologen Reihe mit wachsendem Molekulargewicht abnimmt, bei Substitution von Halogenen, NH_2- und HO-Gruppen in Kohlenwasserstoffen zunimmt. An der genannten Stelle ist „maximale Funkenlänge" mit „Durchschlagsfestigkeit" vertauscht worden, wodurch sich der Sinn der Aussage gerade umkehrt.

3) Das Verhalten dieser Entladung in verschiedenen Flüssigkeiten läßt sich hübsch nach Art des Faradayschen Verzweigungsversuches demonstrieren: Schaltet man zwei Entladungsstrecken (I. und II.) zwischen je eine Spitze und eine Platte gleichsinnig parallel, umgibt I. mit Isoamylalkohol, II. etwa mit Pentan, so kann man durch passende Regulierung der Elektrodendistanzen bewirken, daß, wenn die Spitzen negativ sind, die Funken nur in I. überspringen, wenn die Spitzen positiv sind, nur in II. Siehe Vierteljahrsbericht d. Wien. V. z. Förd. d. phys. u. chem. Unterr. **10**, Nr. 1. 1905.

in dem die negativen Figuren die größeren sind, jenes Verhältnis Kathodenfall zu Anodenfall gleich 0,39 gefunden, in buttersaurem Isobutyl, in denen das Umgekehrte gilt, gleich 1,75. Da ein größerer Potentialfall an einer Elektrode auf eine größere Beweglichkeit der mit ihr gleichnamigen Elektrizitätsträger deutet, könnten sich so die polaren Unterschiede der Entladung in Flüssigkeiten auf Unterschiede der Beweglichkeiten, bzw. des damit zusammenhängenden Ionisierungsvermögens und der Raumladungsbildung zurückführen lassen, wie dies für Gase heute ziemlich allgemein, wenn auch in verschiedenen Varianten, angenommen zu werden scheint. Eine Überprüfung und Erweiterung jener alten Versuche würde sich wohl lohnen.

Wien, Institut für Radiumforschung, April 1931.

(Eingegangen 21. April 1931.)

Zur Theorie des Schroteffektes.

Von H. J. de Boer.

(Natuurkundig Laboratorium der N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven.)

Fürth[1]) hat eine einfache Theorie des Schroteffektes gegeben. Diese Notiz ist nur eine kleine Erweiterung jener Rechnung.

Wir denken uns, daß jedes auftreffende Elektron erst den Kondensator C aufladet und daß danach die Ladung sich über r und L des Schwingungskreises ausgleicht. Ist die Ladung des Kondensators Q, dann lautet die Differentialgleichung des Schwingungskreises:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = 0,$$

wo

$$i = -\frac{dQ}{dt}.$$

Die Anfangsbedingungen $Q = \varepsilon$ und $\frac{dQ}{dt} = 0$ für die Zeit $t = 0$ geben uns die Lösung:

$$i = \varepsilon \frac{\omega_0^2}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t,$$

wo

$$\omega_0^2 - \alpha^2 = \omega^2, \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \alpha = \frac{r}{2L} \text{ und } \varepsilon$$

die Ladung des Elektrons sind.

1) R. Fürth, Physik. Zeitschr. **23**, 354, 1922.

Die Zahl der Elektronen pro Sekunde sei n, dann ist das mittlere Quadrat des Stromes:

$$\overline{i^2} = \overline{(i_1 + i_2 + \cdots + i_n)^2} = \overline{i_1^2} + \overline{i_2^2} + \cdots + \overline{i_n^2} + 2(\overline{i_1 i_2} + \overline{i_1 i_3} + \cdots + \overline{i_{n-1} i_n}).$$

Jetzt machen wir die folgenden Annahmen:

1. Die Zahl der Elektronen pro sek. n sei sehr groß.
2. Während einer Sekunde ändert sich das mittlere Quadrat des Stromes nicht.
3. Die Dämpfungszeit des Kreises sei sehr klein.

Aus (3) folgt, daß die meisten der n Elektronenschwingungen, die während einer Sekunde einsetzen, am Ende dieser Sekunde ganz abgeklungen sind, nur die letzten noch nicht. Aber die machen bei der großen Zahl n wenig aus. Also mit 3), 1) und 2) darf für $\overline{i^2}$ geschrieben werden:

$$\overline{i^2} = n\overline{i_1^2} + 2[\overline{i_1(i_2 + i_3 + \cdots + i_n)} + \overline{i_2(i_3 + \cdots + i_n)} + \cdots + \overline{i_{n-1} i_n}].$$

$$n\overline{i_1^2} = n\varepsilon^2 \frac{\omega_0^4}{\omega^2} \int_0^\infty e^{-2\alpha t} \sin^2 \omega t \, dt$$

$$= n\varepsilon^2 \frac{\omega_0^4}{\omega^2} \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \cdot \frac{1}{2\alpha} = \frac{\varepsilon i_0}{2rC} \text{ (mit 1 ist } n\varepsilon = i_0).$$

Die Zeit zwischen dem Übergang zweier aufeinander folgenden Elektronen sei τ. Daraus ergibt sich:

$$\overline{i_1 i_2} = \overline{i_2 i_3} = \overline{i_3 i_4} = \text{u.s.w.}$$

Ebenso ist dann $\overline{i_1 i_3} = \overline{i_2 i_4} = \ldots\ldots$ usw.

Analog behandeln wir die weiteren Produkte.

$$\overline{i_1 i_2} = \varepsilon^2 \frac{\omega_0^4}{\omega^2} \int_0^\infty e^{-\alpha(2t+\tau)} \sin \omega t \cdot \sin \omega (t + \tau) \, dt$$

$$= \varepsilon^2 \frac{\omega_0^4}{\omega^2} \left[\frac{\omega}{4\omega_0^2} \sin \omega \tau + \frac{\omega^2}{4\alpha\omega_0^2} \cos \omega \tau \right] e^{-\alpha\tau}.$$

Genau in derselben Weise wird berechnet:

$$\overline{i_1 i_n} = \varepsilon^2 \frac{\omega_0^4}{\omega^2} \left[\frac{\omega}{4\omega_0^2} \sin \omega (n-1)\tau + \frac{\omega^2}{4\alpha\omega_0^2} \cos \omega (n-1)\tau \right] e^{-\alpha(n-1)\tau}.$$

Wir betrachten jetzt die Summe:

$$\overline{i_1 i_2} + \overline{i_1 i_3} + \cdots + \overline{i_1 i_n},$$

dann sind nur die ersten Produkte von null verschieden, da die Abklingungszeit klein angenommen ist. Die Summe wird geliefert durch das

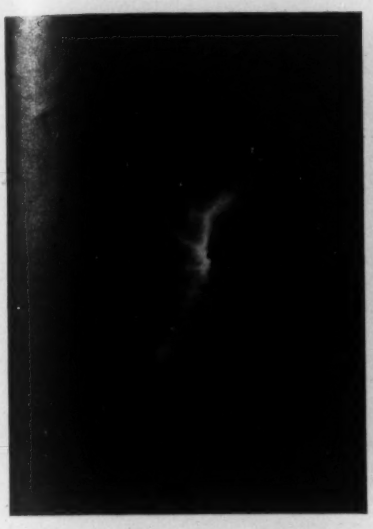

Fig. 1. Positive Figur in Isoamylalkohol.

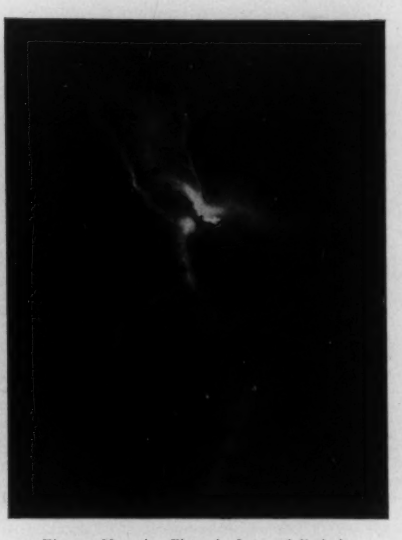

Fig. 2. Negative Figur in Isoamylalkohol.

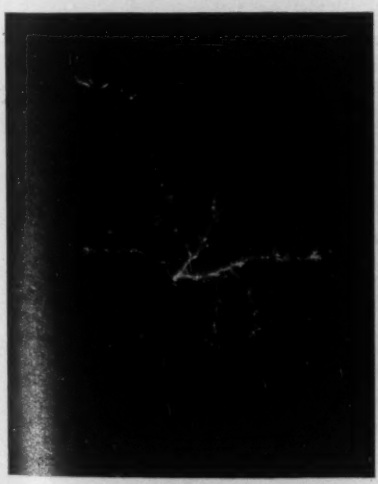

Fig. 3. Positive Figur in buttersauren Isobutyl.

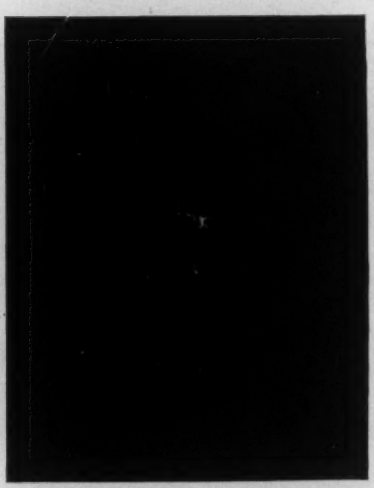

Fig. 4. Negative Figur in buttersauren Isobutyl.

Integral über τ von 0 bis ∞:

$$n\varepsilon^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\left[\frac{\omega}{4\omega_0^2}\sin\omega\tau + \frac{\omega^2}{4\alpha\omega_0^2}\cos\omega\tau\right]d\tau = \frac{n\varepsilon^2}{2}.$$

Die Summe folgender Produkte $\overline{i_2 i_3} + \overline{i_2 i_4} + \overline{i_2 i_5} + \ldots\ldots$ usw. ist natürlich gleich $\overline{i_1 i_2} + \overline{i_1 i_3} + \overline{i_1 i_4} + \ldots\ldots$ usw. Da i_2 nach genau derselben Zahl Elektronen abgeklungen ist wie i_1, können wir für die zweite Summe auch setzen $\frac{n\varepsilon^2}{2}$. Dies geht so weiter, bis wir ein Elektron erreicht haben, das am Ende der ins Auge gefaßten Sekunde noch nicht ausgeschwungen hat. Aber dieser Betrag, den wir zu wenig bekommen, ist ganz zu vernachlässigen, wie wir oben bewiesen haben für die Quadrate. Also bekommt man für die Summe aller Produkte: $2\,[\overline{i_1 i_2} + \overline{i_1 i_3} + \overline{i_2 i_3} + \cdots + \overline{i_{n-1} i_n}] = n^2\varepsilon^2 = i_0^2$. Das mittlere Quadrat des Stromes ergibt sich hieraus

$$\overline{I^2} = \frac{\varepsilon i_0}{2\tau C} + i_0^2.$$

Dies ist gerade der Wert, welchen Ornstein und Burger aus ganz anderen Betrachtungen gefunden haben[1]).

Bemerkenswert ist noch, daß die Stromschwankungen infolge des Schroteffektes aus den mittleren Quadraten der einzelnen Stöße sich ergeben und der Gleichstrom aus den Produkten.

Jetzt nehmen wir die Zeit zwischen dem Übergang zweier aufeinander folgenden Elektronen verschieden und zwar willkürlich verteilt. Dazu kehren wir zurück zu dem Integral, das die Summe $\overline{i_1 i_2} + \overline{i_1 i_3} + \overline{i_1 i_4} + \ldots + \overline{i_{n-1} i_n}$ bildet. Man darf eine Summe in ein Integral verwandeln, wenn man die ganze Zeit auf eine sehr große Menge äquidistante Zeitabstände verteilt und jedes Intervall noch eine gleich große Zahl Punkte hat. Wir brauchen für unseren Fall also nur noch anzunehmen, daß in jedem Intervalle die Zahl der Elektronen noch so groß ist, daß die Schwankungszahl null ist bei einer willkürlichen Verteilung der Elektronen. Also dürfen wir auch jetzt die Summe durch ein Integral ersetzen und haben damit bewiesen, daß auch bei willkürlicher Verteilung der Elektronen die Produkte den Gleichstrom und die Quadrate den Wechselstrom bilden.

1) Ornstein und Burger, Ann. d. Phys. **70**, 622, 1923.

Eindhoven, Februari 1931.

(Eingegangen 22. April 1931.)

Über den Quereffekt der Magnetostriktion.

Von A. Esau.

Während der Längseffekt der Magnetostriktion bis in die neueste Zeit hinein eingehend untersucht worden ist[1]), liegen über den unter ihrem Einfluß ebenfalls eintretenden Volumeneffekt nur wenige Arbeiten vor[2]), die in ihren Ergebnissen teilweise voneinander abweichen. Als die genauesten können wohl die Messungen von Nagaoka und seinen Mitarbeitern angesehen werden, die vor nahezu 30 Jahren veröffentlicht worden sind.

Ein Versuch, neben dem Längseffekt auch den Quereffekt direkt zu messen, ist meines Wissens nur von Rhoads[3]) unternommen worden, der aber wegen der Nichtreproduzierbarkeit der Werte als gescheitert angesehen werden muß.

Nachdem es nun aber gelungen ist, wie in einer demnächst erscheinenden Arbeit von Dietsch näher ausgeführt werden wird, die Methode für die Bestimmung des Längseffektes — es handelt sich um die schon vielfach benutzte Schwebungsmethode — um nahezu zwei Zehnerpotenzen in ihrer Empfindlichkeit zu steigern, stehen auch der Messung des Quereffektes unüberwindliche Schwierigkeiten nicht mehr entgegen.

Aus den erwähnten Beobachtungen des Volumens und Längseffekts läßt sich der Quereffekt auf sehr einfache Weise berechnen.

Bezeichnet man die Länge des zylindrischen Stabes mit l, den Durchmesser mit b und sein Volumen mit v, so ist

$$v = \frac{b^2}{4}\pi l$$

und

$$v + dv = \frac{(b + db)^2}{4}\pi \cdot (l + dl).$$

Da nun nach den Messungen von Nagaoka der Volumeneffekt viel kleiner ist als der Längseffekt, so wird die Größe des Quereffekts im wesentlichen bestimmt sein durch die Amplitude des Längseffekts; ihre Vorzeichen werden entgegengesetzt sein.

Wird für ein Material $\frac{dl}{l} = 0$ (Villari-Punkt), so ist die Größe des Quereffekts gleich der Hälfte des Volumeneffekts. Der Quereffekt verschwin-

1) A. Schulze, Zeitschr. f. Phys. **50**, 448, 1928.

2) Jonle, Phil. Mag. **30**, 76, 1847; Knott, Trans. Roy. Soc. Edinb. **38**, S. 527; Bidwell, Proc. Roy. Soc. **56**, 24, 1894; Cantone, Rendiconti Ac. Sincei **6**, 253, 1890; Nagaoka, Phil. Mag. **46**, 261, 1898; Phil. Mag. **41**, 45, 1902; Phil. Mag. **49**, 334, 1900.

3) Rhoads, Phil. Mag. (VI), **2**, 403, 1901.

det, wenn entweder $\frac{dv}{v}$ und $\frac{dl}{l}$ beide gleichzeitig Null werden oder aber

$$\frac{dv}{v} = \frac{dl}{l}$$

wird.

Der erste Fall tritt, wie aus den bisher vorliegenden Messungen der beiden Effekte hervorgeht, nicht ein und es bleibt daher nur der zweite übrig.

Im folgenden soll aus dem erwähnten Beobachtungsmaterial von Nagoaka — gemessen wurde von ihm an dem gleichen Material der Längs- und Volumeneffekt — der Verlauf des Quereffekts als Funktion der Feldstärke H berechnet werden und zwar für weiches Eisen, Nickel, Nickelstahl und Kobalt.

Weiches Eisen (Fig. 1).

Aus der Figur geht zunächst hervor, daß der Quereffekt kleiner ausfällt als der Längseffekt und daß außerdem die Vorzeichen der beiden Effekte entgegengesetzt sind. Man sieht ferner,

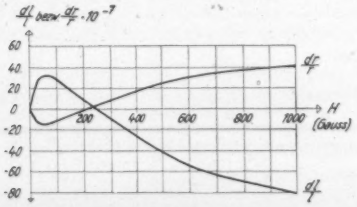

Fig. 1. Magnetostriktion von *Fe*.

daß die Villari-Punkte für Längs- und Quereffekt nicht bei der gleichen Feldstärke liegen; sie werden nicht gleichzeitig Null und zwar verschwindet der Quereffekt bei etwas kleineren Feldstärken als der Längseffekt ($H = 225$ gegenüber $H = 255$).

Auch Stahl, der von Nagaoka ebenfalls untersucht worden ist, zeigt in bezug auf die beiden Villari-Punkte ein ganz ähnliches Verhalten.

Nickel (Fig. 2).

Da, wie bekannt, der Längseffekt hier dauernd negativ ist, ein Villari-Punkt also nicht existiert, so zeigt auch der Quereffekt das gleiche Verhalten. Verglichen mit Eisen ergibt sich ferner, daß die Größe des Effekts beim Nickel (positiv) etwa 6mal größer ist.

Nickelstahl (Fig. 3).

Untersucht worden sind drei verschiedene Legierungen und zwar mit 46, 36 und 29 Proz. Nickelzusatz zum Stahl. Die Längseffekte sind, wie aus der Figur hervorgeht, alle positiv und

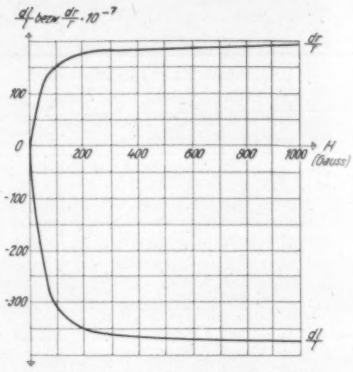

Fig. 2. Magnetostriktion von *Ni*.

zeigen keine Villari-Punkte. Sie werden außerdem mit abnehmendem Nickelgehalt kleiner.

Die aus Volumen und Längseffekt berech-

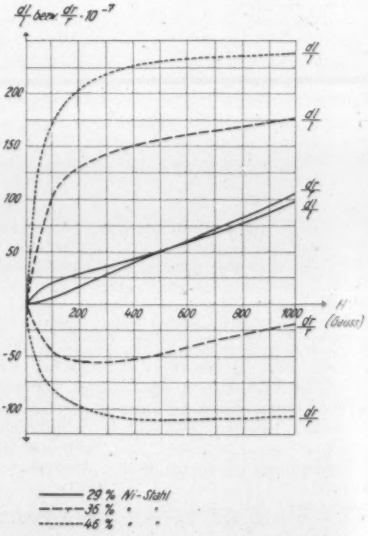

Fig. 3. Magnetostriktion von *Ni*-Stahl-Legierungen.

neten Quereffekte sind bei der Legierung mit 46 Proz. Nickel negativ und ohne Villari-Punkt.

Der 36 proz. Nickelstahl zeigt zunächst einen kleineren Quereffekt und außerdem wird bei einer Feldstärke von etwa 1400 Gauß der Effekt Null, um dann bei noch größeren Werten positiv zu werden. Es tritt hier also der Fall ein, daß nicht wie beim Eisen beide Effekte einen wenn auch an etwas verschiedenen Punkten liegenden Villari-Punkt besitzen, sondern nur der Quereffekt allein einen solchen aufweist.

Bei der Legierung mit nur 29 Proz. Nickel verläuft der Quereffekt vollständig im positiven Bereich, ein Villari-Punkt ist also hier nicht vorhanden.

Während der Längseffekt bei Feldstärken unter 500 Gauß zunächst größer ist als der Quereffekt, tritt eine Gleichheit der beiden Effekte bei etwa 550 Gauß ein, worauf dann bei noch höheren H-Werten der Quereffekt überwiegt.

Kobalt (Fig. 4).

Kobalt ist von Nagaoka in zwei Formen untersucht worden und zwar einmal gegossen und außerdem geglüht.

Im gegossenen Zustand verläuft der Längseffekt zunächst im negativen Bereich, hat dann

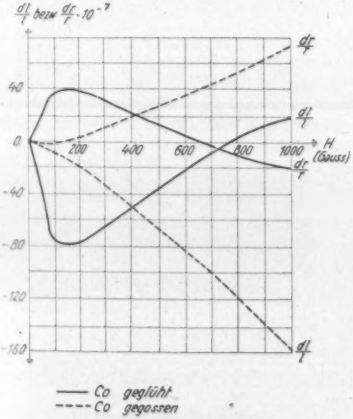

Fig. 4. Magnetostriktion von *Co*.

bei etwa 750 Gauß einen Villari-Punkt, um bei noch größeren Feldstärken positiv zu werden.

Der Quereffekt hat das umgekehrte Vorzeichen; er verschwindet bei etwa 690 Gauß und wird dann negativ.

Wesentlich hiervon abweichend verhält sich das Material im geglühten Zustand.

Der Längseffekt ist bei geringen Feldstärken hier zunächst kleiner, wird dann aber von etwa 400 Gauß ab erheblich größer als bei dem gegossenen Material: Ein Villaripunkt ist nicht vorhanden.

Der Querschnitt ist bei H-Werten unterhalb von etwa 100 Gauß außerordentlich klein und zwar abweichend von dem vorhergehenden Fall negativ. Nach Überschreiten des Villari-Punktes, der hier schon bei etwa 125 Gauß liegt, wird er dann positiv und erreicht bei Feldstärken über 700 Gauß Werte, die erheblich größer sind als beim gegossenen Material. Es existiert also beim geglühten Kobalt ähnlich wie beim 36 proz. Nickelstahl ein Villari-Punkt nur beim Quereffekt, während der Längseffekt einen solchen nicht aufweist.

Während der Verlauf des Quereffekts im Vorstehenden aus den Messungen des Längs- und Volumeneffekts von Nagaoka, d. h. also auf indirektem Wege bestimmt worden ist, wird eine im Gange befindliche Untersuchung über den gleichen Gegenstand den Quereffekt direkt unter Verwendung der bereits eingangs erwähnten sehr empfindlichen Schwebungsmethode durchführen, worüber zu gegebener Zeit berichtet werden wird.

(Eingegangen 5. Mai 1931.)

Korrespondenz zwischen Wellen- und klassischer Mechanik.

Von K. K. Mukherjee.

In einer Reihe früherer Mitteilungen[1]) haben K. C. Kar und der Autor eine Theorie der Wellenstatistik entwickelt, die statistische Interpretation der Schrödingerschen Wellenmechanik liefert. Die vorliegende Arbeit erstrebt, die Korrespondenz dieser Wellenstatistik mit der klassischen Mechanik aufzustellen.

Abt. A.

Unsere Wellengleichung ist

$$\frac{d^2D}{dt^2} = \frac{2(E-V)}{m}\Delta D, \qquad (1)$$

wo D die Dichte der Phasenpunkte bedeutet. Es wurde bereits früher gezeigt, daß für eine Kreisbahn

$$D \sim E^{\frac{4\pi i E}{h}t} \qquad (2)$$

1) K. C. Kar und K. K. Mukherjee, Zeitschr. f. Phys. **59**, 102, 1929; **60**, 243, 1930. — K. C. Kar, Zeitschr. f. Phys. **61**, 675, 1930; **64**, 75, 1930. — K. K. Mukherjee, Zeitschr. f. Phys. **62**, 855, 1930.

oder

$$\dot{D} \sim \frac{4\pi i E}{h} D \tag{3}$$

oder

$$\ddot{D} \sim \frac{4\pi i E}{h} \dot{D}. \tag{4}$$

Die Wellengleichung (1) kann man daher schreiben als:

$$\frac{m}{2(E-V)} \cdot \frac{4\pi i E}{h} \dot{D} = \Delta D.$$

oder

$$\frac{2\pi i m}{h}\left(1 + \frac{V}{E}\right)\dot{D} = \Delta D \tag{5}$$

oder

$$\dot{D} = \frac{h}{2\pi i m}\left(\Delta + \frac{8\pi^2 m}{h^2} V\right) D. \tag{6}$$

Es wurde in den früheren Arbeiten gezeigt, daß der q-Raum mit stehenden Wellen angefüllt ist. Die einfallenden und reflektierten Wellen, welche diese stehenden Wellen bilden, tragen zu gleichen Teilen zur Dichte des Phasenraumes bei. Zieht man jedoch nur einen Wellenzug der einfallenden oder reflektierten Welle in Betracht, so wird der Wert der Phasendichte die Hälfte ausmachen des Betrages, der den stehenden Wellen zukommt. In diesem Falle wird aus Gleichung (5)

$$\dot{D} = \frac{h}{4\pi i m}\left(\Delta + \frac{8\pi^2 m}{h^2} V\right) D. \tag{6}$$

Bezeichnen wir den mittleren wellenstatistischen Wert der Raumkoordinate q mit $\bar{q}$, so erhalten wir für eine Welle allein

$$\bar{q} = \frac{1}{4}\int q D \bar{D}\, d\tau, \tag{7}$$

wo $\bar{D}$ die Kojugierte der komplexen Funktion D und D derart normalisiert ist, daß

$$\int \frac{D\bar{D}}{4} d\tau = 1. \tag{8}$$

Dann ist

$$p = m\dot{\bar{q}}$$

$$= \frac{m}{4}\int q\,(\ddot{D}\bar{D} + D\dot{\bar{D}})\, d\tau \text{ aus (7) durch differentiieren}$$

$$= \frac{m}{4}\cdot\frac{h}{4\pi i m}\int q\,(\bar{D}\Delta D - D\Delta\bar{D})\, d\tau \text{ aus Gleichung (6)}$$

$$= \frac{h}{16\pi i}\int q \text{ div } (\bar{D} \text{ grad } D - D \text{ grad } \bar{D})\, d\tau.$$

$$= \frac{h}{16\pi i}\Big[\int (D \operatorname{grad} \bar{D} - \bar{D} \operatorname{grad} D)\, d\tau + \int \operatorname{div}\{q\,(\bar{D} \operatorname{grad} D - D \operatorname{grad} \bar{D})\}\, d\tau\Big].$$

Wenn jetzt die Eigenwerte von D diskret sind, so wird das Oberflächenintegral Null. Daher ist

$$p = \frac{h}{16\pi i}\int (D \operatorname{grad} \bar{D} - \bar{D} \operatorname{grad} D)\, d\tau. \tag{9}$$

Dann ist

$$0 = \int \operatorname{grad}(D\bar{D})\, d\tau$$

$$= \int (D \operatorname{grad} \bar{D} + \bar{D} \operatorname{grad} D)\, d\tau. \tag{10}$$

Multipliziert man Gleichung (10) mit $\frac{h}{16\pi i}$ und addiert dann Gleichung (9) hinzu, so erhält man

$$p = \frac{h}{8\pi i}\int D \operatorname{grad} \bar{D}\, d\tau. \tag{11}$$

Diese Gleichung ist unser Ausdruck für P' den wellenstatistischen Mittelwert des Impulses. Wir wollen jetzt eine Beziehung zwischen dem Impulsmoment P' und dem Kraftmoment M aufstellen.

In der Wellenstatistik haben wir bei Anwendung von Gleichung (11)

$$P = \frac{h}{8\pi i}\int D[r \operatorname{grad} \bar{D}]\, d\tau.$$

Differentiieren wir obige Gleichung in bezug auf die Zeit, so erhalten wir

$$\dot{P} = \frac{h}{8\pi i}\Big\{\int \dot{D}[r \operatorname{grad} \bar{D}]\, d\tau + \int D[r \operatorname{grad} \dot{\bar{D}}]\, d\tau\Big\}$$

$$+ \frac{h}{8\pi i}\Big\{\int \dot{D}[r \operatorname{grad} \bar{D}]\, d\tau - \int \dot{\bar{D}}[r \operatorname{grad} D]\, d\tau\Big\}.$$

Substituiert man die Werte $\dot{D}$ und $\dot{\bar{D}}$ aus Gleichung (6), so folgt

$$\dot{P} = -\frac{h^2}{32\pi^2 m}\Big[\int \Delta D[r \operatorname{grad} \bar{D}]\, d\tau + \int \Delta \bar{D}[r \operatorname{grad} D]\, d\tau\Big] - \frac{1}{4}\Big[\int V D[r \operatorname{grad} \bar{D}]\, d\tau + \int V \bar{D}[r \operatorname{grad} D]\, d\tau\Big] \tag{12}$$

Der Ausdruck

$$\int \{\Delta D[r \operatorname{grad} \bar{D}] + \Delta \bar{D}[r \operatorname{grad} D]\}\, d\tau.$$

kann auch geschrieben werden

$$\int [r, \Delta D \operatorname{grad} \bar{D} + \Delta \bar{D} \operatorname{grad} D]\, d\tau,$$

was Null gesetzt werden kann, wenn wir in Betracht ziehen, daß $\Delta\bar{D} \operatorname{grad} D + \Delta \bar{D} \operatorname{grad} D$ die Div eines bestimmten symmetrischen Tensors ist[1]).

Dann ist der Ausdruck

$$\int V D[r \operatorname{grad} \bar{D}]\, d\tau + \int V \bar{D}[r \operatorname{grad} D]\, d\tau$$

$$= -\int \bar{D}[r \operatorname{grad} (VD)]\, d\tau + \int V \bar{D}[r \operatorname{grad} D]\, d\tau$$

$$= \int D \bar{D}[r \operatorname{grad} V]\, d\tau.$$

1) Sommerfeld, Wave Mechanics (Engl.), p. 247.

Folglich reduziert sich Gleichung (12) zu

$$\dot{P} = -\int \frac{D\bar{D}}{4} [r \operatorname{grad} V]\, d\tau = M\,. \qquad (13)$$

Dadurch ist bewiesen, daß die Beziehung $\dot{P} = M$, die für die klassische Mechanik gilt, auch in der Wellenmechanik richtig ist.

Abt. B.

In Abschnitt A haben wir für die Wellenstatistik die wohlbekannte Beziehung ($\dot{P} = M$) der klassischen Mechanik abgeleitet, und zwar mit einer Methode, die im wesentlichen die Schrödingersche ist. In diesem Abschnitt stellen wir dieselbe Beziehung auf mittels einer vollkommen anderen und weit einfacheren Methode.

Wir haben gezeigt, daß die Geschwindigkeit der x_1 Wellen im q-Raume

$$v = \sqrt{\frac{2(E-V)}{m}} \ldots \qquad (14)$$

ist; dann ist

$$p = m v = \sqrt{2m(E-V)}\,. \qquad (15)$$

Nach der klassischen Mechanik haben wir

$$P = [r \cdot p]$$
$$= [r \sqrt{2m(E-V)}]$$

Differentieren wir die obige Gleichung nach der Zeit, so erhalten wir

$$\dot{P} = \left[r \frac{d}{dt} \left\{ \sqrt{2m(E-V)} \right\} \right]$$
$$= \left[r \cdot \frac{d}{d(E-V)} \left\{ \sqrt{2m(E-V)} \right\} \frac{d(E-V)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \right] \qquad (16)$$
$$= \left[r \cdot \frac{m}{\sqrt{2m(E-V)}} \sqrt{\frac{2(E-V)}{m}} \frac{d}{dx}(E-V) \right].$$

Es ist klar, daß für ein im Felde sich bewegendes Elektron E konstant ist; daher folgt aus der obigen Gleichung

$$\dot{P} = -[r \operatorname{grad} V]$$

und wenn wir den statistischen Mittelwert von $\dot{P}$ mit $\bar{\dot{P}}$ bezeichnen, erhalten wir

$$\bar{\dot{P}} = \int \frac{\dot{P} D \bar{D}}{4} d\tau = -\int \frac{[r \operatorname{grad} V] D \bar{D}}{4} d\tau = M\,.$$

Differentiieren wir dann nach der Zeit, so erhalten wir

$$\ddot{p} = \frac{d}{dt} \sqrt{2m(E-V)}$$
$$= -\operatorname{grad} V \text{ (siehe Gleichung (16))}.$$

Daher ist

$$\bar{\ddot{p}} = \int \frac{\ddot{p} D \bar{D}}{4} d\tau = -\int \frac{\operatorname{grad} v \cdot D \bar{D}}{4} d\tau\,.$$

Zum Schlusse möchte ich Herrn Dr. K. C. Kar danken für seine mannigfaltigen und wertvollen Ratschläge während der Ausführung dieser Untersuchung.

Calcutta, Januar 1931. Physikalisches Laboratorium.

(Eingegangen 8. April 1931.)

BESPRECHUNGEN.

H. Oberth, Wege zur Raumschiffahrt. XII u. 432 S. mit 4 Tafeln und 159 Abbildungen. 3. Auflage von „Die Rakete zu den Planetenräumen". München u. Berlin 1929. R. Oldenbourg. Geb. RM 20.—.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, den Nachweis zu erbringen, daß beim heutigen Stand der Wissenschaft und Technik, der Bau von Maschinen (Raketen) möglich ist, die zunächst bis in die höchsten Schichten der Atmosphäre steigen können und bei weiterer Vervollkommnung den Anziehungsbereich der Erde verlassen und dabei Menschen mit empornehmen können, wobei sich der Bau solcher Maschinen auch wirtschaftlich lohnen soll. Nach einer allgemeinen Erläuterung über sein Prinzip der Rakete mit flüssigen Brennstoffen werden vom Verfasser im umfangreichen zweiten Teil eine große Reihe physikalisch-technischer Fragen diskutiert, die für den Physiker von besonderem Interesse sein dürften. Hierin werden Betrachtungen über das Massenverhältnis, die günstigste Geschwindigkeit und das Energieproblem angestellt und die verschiedenen Aufstiegsmöglichkeiten sowie Steuerungsfragen besprochen. Der dritte Teil ist konstruktiven Fragen gewidmet. Im vierten Teil werden verschiedene Verwendungsmöglichkeiten von Raketen erörtert. Der Verfasser will Schritt für Schritt von der geographischen und meteorologischen Registrierrakete über die wirtschaftlich einträgliche Postrakete schließlich zu der Weltraumrakete gelangen. Ist auch dieses letzte Ziel zur Zeit wohl noch unerreichbar — insbesondere dürften die noch unbekannten Widerstandsverhältnisse des irdischen Luftmantels bei hohen Geschwindigkeiten und die Landung außerordentliche Schwierigkeiten bieten — so besteht der Wert des Oberthschen Buches, das von der Société Astronomique de France mit dem Hirschpreis ausgezeichnet worden ist, nicht zuletzt auch darin, auf eine große Reihe noch ungelöster Fragen hinzuweisen, die nicht nur für den Physiker, Astronomen und Ingenieur, sondern auch für den Mediziner von Interesse sind. R. Hermann.

Gmelins Handbuch der Anorganischen Chemie. Systemnummer 58: Kobalt, Teil B. Herausgegeben von der Deutschen Chemischen Gesellschaft. Bearbeitet von R. J. Meyer und Erich Pietsch. Gr.-8°. XXV u. 376 S. Mit 2 Fig. 8. Aufl. Berlin 1930. Verlag Chemie G. m. b. H. Preis RM 58.—, Subskpt. RM 45.—.

Dieser Teil B des Kobalts trägt den Untertitel „die Ammine des Kobalts". Er umfaßt also ein Gebiet, das dem Physiker vielleicht für den verwendeten Umfang reichlich speziell erscheinen könnte, von dem der Chemiker aber weiß, daß es nicht nur an Fülle des stofflichen und präparativen Materials in der anorganischen Chemie an hervorragender Stelle steht, sondern daß es auch für die Entwicklung der Grundanschauungen der chemischen Bindungslehre die hervorragendsten Beispiele und Tatsachen geliefert hat. Hat doch A. Werner an diesen „Kobaltiaken" (Ammoniak-Komplexsalzen des Kobalts) seine bahnbrechende Lehre von den Komplex- und Koordinationsverbindungen vorwiegend exemplifiziert, eine Lehre, die jetzt von Seiten der Valenzauffassungen der theoretischen Physik wieder aufgegriffen und vertieft wird. So ist es begrüßenswert, daß dieses Kapitel der anorganischen Chemie, das schon im „alten Gmelin" eine ausführliche Darstellung aus der berufenen Feder Pfeiffers gefunden hatte, in der neuen Auflage in völlig überarbeiteter und erweiterter Form wiederkehrt, auf den modernen Stand gebracht von Pfeiffers Mitarbeitern Olga Angern und M. v. Stackelberg. Neben dem rein chemischen enthält der Band (der auch einzeln bezogen werden kann) viel wichtiges physikochemisches Material.

Schwab.

A. Wenzl, Das naturwissenschaftliche Weltbild der Gegenwart. 8°. 134 S. Sammlung Wissenschaft und Bildung Bd. 261. Leipzig 1929. Verlag Quelle & Meyer. RM 1.80.

Jede Wirklichkeitsphilosophie ist irgendwie auf Erfahrungsmaterial angewiesen, dessen komponentieller Formierungseinfluß sich in den abstraktesten philosophischen Endergebnissen nachweisen läßt. Nun ist die Physik die Quelle des sachlichsten Erfahrungsmaterials. Es ist daher selbstverständlich, daß sich alle lebendige Philosophie durch die neueren physikalischen Ergebnisse zu einer Neuorientierung ihrer Fragestellungen gezwungen sieht. Freilich bei den meisten dieser Theorien ist das eigentlich Physikalische und philosophisch Interessierende hinter so hohem mathematischem Mauerwerk verborgen, daß es für die meisten Nichtfachleute unerreichbar sein dürfte. Diesem Umstand sucht das vorliegende Buch in dankenswerter Weise abzuhelfen. Es behandelt im 1. Teil die Entwicklung und den gegenwärtigen Stand des physikalischen Weltbildes bis zu den Auffassungen von Heisenberg und Schrödinger. (Mechanistisches, dynamistisches, energetisches Weltbild; Relativitätstheorie, Atomtheorie, Quantentheorie.) Im 2. Teil wird der philosophische Gehalt dieser Theorien dargestellt und einer erkenntnistheoretischen Kritik unterzogen. Im Schlußteil schließlich werden den Theorien des Anorganischen die des Organischen und Psychischen gegenübergestellt und dann auf dem Boden des kritischen Realismus der Aufbau eines metaphysischen Weltbildes versucht. „Das Wesen der Realität ist psychisch ihre Form und ihr Ausdruck mathematisch, ihr Sinn und ihre Tendenz die harmonische Einheit einer Vielheit."

Eine Würdigung des metaphysischen Teils ist dem Referenten deshalb nicht möglich, weil er zu denen gehört, die die Bedeutung der physikalischen Begriffe und Bilder lediglich in der Gewinnung und Darstellung von Erfahrungen sehen, denen es aber in Hinblick auf die Geschichte der Physik als ungerechtfertigtes Wagnis erscheint, daraus eine Antwort auf die Frage nach dem „metaphysischen Wesen der Realität" zu entnehmen. Aber bei metaphysischen Stellungsnahmen ist ja wohl ein objektives Urteil überhaupt fraglich. Objektiv beurteilen läßt sich dagegen die Darstellung des physikalischen Weltbildes und seine philosophische Kritik. Diese Aufgaben wurden geradezu glänzend gelöst. (Über kleine Unstimmigkeiten, die dem Ref. bei der Darstellung der Broglieschen Theorie auffielen, darf wohl leicht hinweggesehen werden.) Das Buch kann allen naturphilosophisch Interessierten warm empfohlen werden, die, ohne über die mathematisch-physikalische Fachbildung zu verfügen, die zum Studium der Originalliteratur gehört, sich doch gern über den gedanklichen Inhalt der neueren physikalischen Theorien orientieren möchten. Aber auch dem Fachmann dürfte die kritisch-philosophische Darstellung manche Anregung geben.

R. Döpel.

Geschichten der Gesellschaft für Lindes Eismaschinen A.-G. Wiesbaden. 8°. 190 S. V. D. I. Berlin 1929.

Das Buch stellt eine von der Gesellschaft zu ihrem 50jährigen Jubiläum herausgegebene Festschrift dar. Sie enthält biographische und personale Notizen über den geistigen Begründer und seine Mitarbeiter, behandelt die glänzende und wirtschaftliche Entfaltung dieses blühenden Unternehmens und liefert einen interessanten, gut illustrierten Beitrag zur geschichtlichen Entwicklung der neuzeitlichen Kältetechnik.

R. Döpel.

Berichtigung

zum Zusammenfassenden Bericht: H. Alterthum, „Die Entwicklung auf dem Gebiete der temperaturbedingten Kristallstrukturänderungen von homogenen festen Metallen". Physik. Zeitschr. **32**, 305, 1931.

Auf S. 315 muß es am Schluß des ersten Absatzes in der dritten Zeile von unten heißen:

$$n = 300 \text{ bis } 700$$

und nicht 700 bis 1600 für die Zahl der zur Keimbildung nötigen Atome.

Tagesereignisse.

Der VIII. Internationale Kongreß für Photographie, der vom 3. bis 8. August in Dresden, mit Schlußtag in Berlin, stattfinden wird, hat die in drei Sprachen gehaltenen Programme und Statuten versandt, die von der Geschäftsstelle des Kongresses in Dresden-A. 20, Paradiesstraße 6B, eingefordert werden können.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Bonn Dr. Friedrich Becker für Astronomie und Dr. Ernst Bessel-Hagen für Mathematik.

Ernannt: Die Privatdozenten für Chemie an der Technischen Hochschule Dresden, Abteilung Forstliche Hochschule, Dr. Walther Gierisch und Dr. Rudolf Lorenz zu a. o. Professoren ebenda.

Gestorben: Der Präsident des Technischen Versuchsamts in Wien Wirklicher Geheimer Rat Dr. Wilhelm Franz Exner.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. P. Debye in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig
Druck von August Pries in Leipzig